

**Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»
в г. Смоленске**

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор филиала ФГБОУ ВО
«НИУ «МЭИ» в г. Смоленске
д.т.н. проф. Федулов А.С.

подпись

« ____ » _____ 2026 г.

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ
В АСПИРАНТУРУ**

Группа научных специальностей – 1.2. Компьютерные науки и информатика

Научная специальность – 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Смоленск, 2026

1. Линейная алгебра и теория чисел

Правило Крамера решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Обратная матрица, способы ее нахождения. Векторы. Операции с векторами. Скалярное произведение векторов. Определение и свойства векторного произведения векторов, его геометрический смысл. Основные типы уравнений прямой на плоскости. Основные виды уравнений плоскости. Уравнения прямой в пространстве. Кривые второго порядка. Полярная система координат. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Аффинные преобразования, их свойства. Аффинная система координат. Теорема о задании аффинного преобразования в координатах. Матрица аффинного преобразования. Поверхности второго порядка, их канонические уравнения. Понятие многочлена от одной неизвестной. Теорема о делении с остатком. Теорема о свойствах делимости в кольце многочленов над полем. Теорема Безу. Схема Горнера. Теорема о числе корней многочлена. Задача интерполяции. Интерполяционная формула Лагранжа. Теорема о неприводимых многочленах. Формулы Виета. Определение векторного пространства. Определение подпространства. Теорема о свойствах подпространства. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов. Определение базы. Теорема о дополнении до базы. Теорема о размерности пространства. Определение матрицы перехода от одной базы к другой. Теорема о свойствах матрицы перехода. Теорема о пересечении подпространств. Теорема о строении линейной оболочки. Теорема о сумме двух подпространств. Определение прямой суммы двух подпространств. Теорема о прямой сумме двух подпространств. Определение ранга матрицы. Определение линейного оператора. Теорема о свойствах линейных операторов. Операции над линейными операторами.

Матрица линейного оператора. Теорема о связи матриц линейного преобразования в разных базах. Характеристический многочлен линейного преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Теорема о нахождении собственных значений. Определение и примеры нормальной жордановой формы матрицы. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними. Теорема о матрице квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Пространства со скалярным произведением. Теорема Коши — Буняковского — Шварца. Теорема о свойствах нормы вектора. Теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации. Теорема об ортогональном дополнении.

Делимость, простые числа, наибольший общий делитель. Расширенный алгоритм Евклида. Цепные дроби. Асимптотический закон распределения простых чисел. Мультипликативные функции. Полная система вычетов, приведенная система вычетов. Теорема Эйлера. Теорема Ферма, тест Ферма на простоту. Понижение степени сравнения. Сравнения первой степени и их

решение. Системы сравнений первой степени и их решение. Китайская теорема об остатках. Квадратичные сравнения. Символ Лежандра. Закон взаимности. Существование решений квадратичного сравнения по простому модулю. Символ Якоби и его свойства. Тест Соловея-Штрассена на простоту. Существование и количество решений квадратичного сравнения по составному модулю. Задача дискретного логарифмирования. Числа Ферма, теорема Пепина, тест Пепина.

2. Логика предикатов и математический анализ

Язык логики высказываний. Синтаксис языка: алфавит и правила построения формул. Понятие логического следования, принцип дедукции. Совершенные КНФ и ДНФ. Теорема Поста. Полные системы булевых функций. Базис Булевы функции от двух аргументов. Булевы функции и формулы алгебры высказываний. Минимизация ДНФ. Метод карт Карно. Полиномы Жегалкина. Логическое следование формул логики предикатов. Приведенная и предваренная нормальная форма для формул логики предикатов. Кванторные операции над предикатами. Логические операции над предикатами. Свободные и связанные вхождения переменных, замкнутые формулы. Синтаксис языка логики предикатов: алфавит, термы, атомы, правила построения формул. Множество истинности предиката. Равносильность и следование предикатов. Понятие формулы логики предикатов.

Дифференцируемое отображение и функции. Производные по направлению, частные производные класса C^n , дифференцируемость отображений класса C^1 . Формула Тейлора. Экстремумы и формула Тейлора. Относительный экстремум, множитель Лагранжа. Локальная обратимость отображения с обратимым дифференциалом. Теорема о неявной функции. Локальное задание гладких подмногообразий в V^n . Касательное пространство.

Интеграл Римана и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, квадратурные формулы Гаусса. Оценки погрешностей. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Тензор скоростей деформаций. Кинематический смысл его компонент. Формула Остроградского-Гаусса. Дивергенция скорости, вектор вихря скорости. Их кинематический смысл. Формула Стокса. Собственные и несобственные интегралы зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки.

Сходимость числовых рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Умножение рядов. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Мера множества и свойства. Измеримые функции. Теорема Рисса о сходимости о мере. Интеграл Лебега и его основные свойства. Пространства \dot{E}^p . Неравенства Коши — Буняковского, Минковского и Шварца. Произведение мер и

теорема Фубини.

Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Понятие римановой поверхности. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Аналитичность элементарных функций и связь аналитических функций и гармонических. Полус и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.

Линейные и метрические пространства. Нормированные пространства. Банаховы, гильбертовы пространства. Линейные операторы, норма оператора. Сопряженный оператор. Теорема Банаха — Штейнгауза. Теорема Хана — Банаха. Теорема Банаха об обратном операторе. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала. Резольвента и спектр линейного оператора. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.

Линейные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальные системы решений. Метод вариации постоянных. Дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Квазиполиномы. Общие и частные решения. Функция Грина. Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Асимптотическая устойчивость.

Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера—Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Теорема Гильберта — Шмидта. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье. Поточечная сходимость; достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Полнота системы тригонометрических функций.

Характеристики уравнений в частных производных. Задача Коши и теорема Коши—Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных. Метод Даламбера для бесконечной струны. Функция Грина задачи Коши для волнового уравнения. Формула Грина для гармонических функций. Метод разделения переменных.

Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения. Гармонические функции. Принцип максимума. Фундаментальное решение. Задачи на собственные значения и разложения по собственным функциям.

Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Принцип максимума и теорема единственности.

Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Основные краевые задачи для уравнения Пуассона. Фундаментальное решение и теория потенциала.

3. Основные понятия и задачи моделирования систем

Основные понятия теории моделирования. Сущность понятий «модель» и «моделирование». Классификация видов математического моделирования. Основные проблемы моделирования АС. Сущность имитационного моделирования. Различия имитационных и аналитических моделей. Достоинства и недостатки имитационных моделей. Основные подходы к имитационному моделированию. Основные идеи агентного моделирования. Преимущества агентных моделей. Области эффективного применения агентного моделирования.

Понятие агента, виды агентов. Основные компоненты агентов. Основные свойства и характеристики агентов. Классификация агентов. Агенты с простым поведением. Агенты с поведением, основанным на модели. Целенаправленные агенты. Практичные агенты. Обучающиеся агенты. Сущность и области применения распределенного моделирования. Синхронизация времени в распределенных моделях. Консервативные и оптимистические алгоритмы синхронизации модельного времени. Сущность технологии HLA. Этапы моделирования систем. Построение концептуальной модели. Правила и способы формализации и алгоритмизации процессов.

Основные свойства моделей. Методика оценки оперативности моделирования. Методика оценки достоверности результатов моделирования. Проблема оценки адекватности моделей. Методологические схемы оценки адекватности моделей. Методика оценки адекватности моделей. Организация экспериментов с моделями. Методы понижения дисперсии. Метод случайного баланса. Методика исследования поверхности отклика.

4. Теория групп и теория графов

Понятие группы, аксиомы, примеры: циклические группы, линейные группы, группы подстановок, группы симметрий, квазициклические группы, группы кватернионов. Подгруппы. Порождающие множества. Порождающие и непорождающие элементы групп. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа и факторгруппа. Простая группа. Сопряжение в группе, классы сопряжённых элементов в симметрических и линейных группах. Нормализатор и централизатор множества элементов группы. Гомоморфизм, изоморфизм, теоремы о гомоморфизмах. Конструкции прямого и декартова произведений групп. Расширения посредством групп автоморфизмов, голоморф. Действие группы на множестве. Конечные группы. Силовские подгруппы конечных групп, теоремы Силова. Нильпотентные группы. Теорема Фиттинга и подгруппа Фиттинга. Конечные нильпотентные группы, теоремы Бернсайда Виланда и Фраттини.

Разрешимые группы. Тождество разрешимости. Теорема Холла. Теорема Миллера Морено о разрешимости конечных групп, все собственные подгруппы которых абелевы. Периодические группы. Свободные бернсайдовы группы. Теоремы Бернсайда и Санова о конечности свободных бернсайдовых групп

периодов 2, 3 и 4 конечного ранга.

Способы задания графа: перечисление элементов, рисунок, матрица смежности, матрица инцидентности, матрица Кирхгофа, их свойства, связь между ними. Лемма о рукопожатиях. Критерий наличия в графе перешейка. Однородные графы, свойства их матрицы смежности. Критерий кографа в терминах запрещённого порождённого подграфа. Основные свойства деревьев. Теорема Эйлера о количестве граней связного планарного графа. Критерии Куратовского – Понтрягина и Вагнера для планарности графа.

5. Специальные функции и математическая физика

Специальные функции и их асимптотическое поведение. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения 2-ого порядка. Принципы предельного поглощения и предельного излучения. Спектр оператора Шредингера с растущим потенциалом. Одномерный оператор Шредингера с убывающим потенциалом, теорема разложения. Блоховские решения одномерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом. Обратная задача теории рассеяния для уравнения Шредингера. Определение волновых операторов, оператора и матрицы рассеяния. Резонансы и асимптотическое поведение решений одномерного волнового уравнения при больших временах. Уравнение Кортевега — де Фриза и эволюция данных рассеяния. M-солитонные решения. Параболическое уравнение. Волновое поле для уравнения Гельмгольца в круге, сосредоточенное вблизи границы Краевая задача Римана. Понятие индекса. Уравнение Гамильтона — Якоби.

Стохастические модели экстремальных нагрузок, базирующихся на теории выбросов случайных процессов. Испытания на надежность, методы и практические приемы обработки информации. Ускоренные испытания изделий. Основные гипотезы и модели среды в теории пластичности. Расчеты идеально пластических конструкций. Постулат изотропии А.А. Ильюшина. Постулат Друккера. Ассоциированный закон течения. Технические теории ползучести.

Кинетика процесса разрушения, вязкое и хрупкое разрушение и их особенности. Силовые критерии разрушения (О.Мора, А.Надаи, Писаренко-Лебедева и др.). Деформационные критерии разрушения; диаграмма пластичности В.П. Колмогорова, деформационный критерий в терминах напряжений. Малоцикловая усталость при нормальной и повышенной температуре. Многоцикловая усталость. Построение полной вероятностной диаграммы усталостной прочности.

Тензор деформации. Термодинамика деформирования. Закон Гука. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Деформации с изменением температуры. Деформации термические и адиабатические. Уравнения равновесия изотропных тел. Упругие волны в изотропной среде. Отражение и преломление плоской монохроматической волны от границы раздела двух упругих сред. Поверхностные волны. Разбиение тензора напряжений на шаровой тензор напряжений и тензор

девиатора напряжений. Пластичность. Условие текучести Мизеса. Уравнения механики сплошной среды, описывающие упругопластические сечения. Теплопроводность. Уравнение теплопроводности в твердых телах. Вязкость твердых тел. Тензор вязких напряжений.

Идеальная жидкость. Уравнение Эйлера. Гидростатика. Уравнение Бернулли. Сохранение циркуляции скорости. Потенциальное движение. Несжимаемая жидкость. Гравитационные волны. Неустойчивость Рэля—Тейлора. Вязкая жидкость. Уравнение движения вязкой жидкости. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости. Течение по трубе. Закон подобия. Ламинарный пограничный слой. Общее уравнение переноса тепла. Теплопроводность в несжимаемой жидкости. Теплопроводность в неограниченной среде. Теплопроводность в ограниченной среде. Закон подобия для теплопередачи. Свободная конвекция. Движение сжимаемого газа. Стационарный поток сжимаемого газа. Истечение газа через сопло. Одномерное автомодельное движение. Характеристики. Инварианты Римана. Поверхностные явления. Формула Лапласа. Капиллярные волны. Термокапиллярная неустойчивость. Ударные волны. Поверхности разрыва. Ударная адиабата. Ударные волны в политропном газе.

6. Экстремальные задачи

Метод градиентного спуска для численного решения задачи на экстремум для функций двух переменных. Задача на условный экстремум. Множители Лагранжа. Основная задача линейного программирования. Математическая формулировка. Двумерная задача и ее решение графическим путем. Симплекс-метод решения основной задачи линейного программирования. Задача на экстремум функционала. Необходимые условия экстремума (уравнения Эйлера). Задача о брахистохроне.

7. Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные события и вероятности их осуществления. Понятие случайной величины. Генеральная совокупность и правила формирования новой выборки. Непрерывные случайные величины. Распределение вероятностей. Плотность вероятности. Нормальное распределение. Вычисление математического ожидания и дисперсии. Непрерывные случайные величины. Распределение вероятностей. Плотность вероятности. Распределение Пуассона. Вычисление математического ожидания и дисперсии.

Статистические оценки параметров нормального распределения. Состоятельность, несмещённость, эффективность. Оценки для математического ожидания и дисперсии. Понятие интервальной оценки параметра.

8. Нейросетевые методы обработки и анализа данных

Шкалы измерений. Способы определения силы связи между переменными, коэффициенты корреляции.

Постановка задачи и предположения регрессионного анализа (РА). Проверка гипотез о параметрах регрессионной модели. Проверка адекватности регрессионной модели. Влияние несоблюдения предположений РА на точность результатов.

Критерии оптимальности планов регрессионного анализа: 1) критерии, связанные с точностью оценок коэффициентов регрессии (условие ортогональности плана, критерии О, А, Е оптимальности); 2) критерии, связанные с предсказательными свойствами модели (С и О оптимальности, критерий ротатабельности плана); 3) критерии, определяющие стратегию эксперимента (минимум необходимых опытов, свойство композиционности плана, рандомизация реализации опытов, принцип оптимального использования факторного пространства). Планирование эксперимента при построении регрессионных моделей второго порядка. Стационарный случайный процесс и его спектральное разложение. Классификация динамических систем, определение частотных передаточных функций. Статистическая динамика многомерных систем. Статистический подход к задачам прогнозирования надежности. Метод А.Р. Ржаницына.

Основные характеристики и компоненты временного ряда. Сглаживание временного ряда, определение тренда основных компонент. Выявление сезонной составляющей.

Постановка задачи классификации и кластеризации. Иерархические и неиерархические (плоские) методы кластеризации. Меры близости и расстояния. Критерии качества кластеризации. Бинарная и многоклассовая классификация. Способы обучения и тестирования классификаторов. Критерии качества классификации. Ансамблевые (коллективные) методы классификации, принципы построения, примеры. Способы визуализации многомерных данных.

Модель искусственного нейрона. Архитектуры искусственных нейронных сетей (ИНС) и основные подходы к их обучению. Многослойный персептрон и способы его обучения. Прикладные задачи, решаемые с помощью ИНС.

Рекомендуемая литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2000.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 2002.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1956.
5. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч I и ч. II.

7. Кудрявцев Л.Д. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х томах.
8. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии.
9. Воеводин В.В. Линейная алгебра
10. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.
11. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.
12. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
15. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1973.
16. Булинский А.В. Ширяев А.Н. Введение в теорию случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
17. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
19. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
20. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
21. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
22. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство МГУ, 2004.
23. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.
24. Петровский И.Г. Лекции по уравнениям в частных производных.
25. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. [и П. М.: Физмагиз, 1962.
26. Бахвалов Н.С. Численные методы.
27. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем.
28. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. т Ги П. М.: Мир, 1984.
29. Мальцев А.И. Вычислимые функции.
30. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.
31. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
32. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1972.
33. Алексеев А.С., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
34. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. М.: РХД., 2007.
35. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т.2 М.: Наука, 1977.
36. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
37. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. М.: МГУ, 2012.
38. Седов Л. И. Механика сплошной среды Т. 1 Учебник для университетов и вузов. М.: Наука, 1983.

39. Седов Л. И. Механика сплошной среды Т. 2 Учебник для университетов и втузов. М.: Наука, 1984.
40. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.7 Теория упругости. М.: Физматлит, 2007.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6 Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001.
42. Зельдович Я. Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
43. Котельников И. А. Лекции по физике плазмы: учебное пособие для вузов: в 2 томах. Санкт-Петербург: Лань, 2021.
44. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.
45. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
46. Рыков А.С. Методы системного анализа: Многокритериальная и нечеткая оптимизация, моделирование и экспертные оценки. М.: Экономика, 1999.
47. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике. Т. 1, 2. М.: Мир, 1986.
48. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы – 2-е изд., - М.: Физматлит, 2007. – 312 с.
49. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы – 2-е изд., - М.: Физматлит. 2007. – 440 с.
50. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. Под редакцией А. В. Нетушила. – М.: Высшая школа. 1976. – 424 с.
51. Теория автоматического управления. Нелинейные системы, управление при случайных воздействиях: Учебник для вузов. Под редакцией А.В. Нетушила. – 2-е изд., - М.: Высшая школа, 1983. – 432 с.
52. Орлов А.И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006. - 671 с.
53. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL. М.: Форум, 2008 - 464 с.

«Согласовано»

Заведующий кафедрой ВТ
д.т.н., профессор

Борисов В.В.