Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»

по научной работе

Драгунов В.К.

____

«____» _______________ 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ В АСПИРАНТУРУ

Группа научных специальностей – 1.1. Математика и механика

Научная специальность – 1.1.6. Вычислительная математика

Москва, 2022

I. Математический анализ

Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Теорема Асколи - Арцела. Дифференцируемые функции одной переменной и их свойства. Формула Тейлора. Определенный интеграл и его свойства. Критерии интегрируемости. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона - Лейбница. Числовые последовательности и ряды. Сходимость. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости числового ряда. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье в среднем. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье. Функции нескольких переменных. Экстремумы. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Собствен-ные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру.

Скалярные и векторные поля. Градиент. Дивергенция. Ротор. Теоремы Гаусса – Остроградского и Стокса. Потенциальные векторные поля и условие потенциальности. Соленоидальное поле. Критерий соленоидальности.

Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометричес-кий смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплек-сного переменного задаваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции и их свойства. Теорема Коши об интеграле по замкну-тому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.

II. Линейная алгебра.

Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Определитель матрицы. Правило Крамера. Обратная матрица. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Теорема Кронекера - Капелли. Однородная система уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

Линейные операторы в конечномерных пространствах. Матрица линейного оператора. Переход к другому базису. Матрица перехода. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Инвариантные подпространства. Корневые подпространства. Жорданова форма. Сопряженный оператор и сопряженная матрица. Теорема Шура. Нормальные, унитарные и эрмитовы операторы и матрицы в унитарном пространстве. Нормальные, ортогональные и симметричные операторы и матрицы в евклидовом пространстве. Неотрицательно определенные и положительно определенные операторы.

III. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, для системы уравнений первого порядка и уравнения порядка выше первого. Линейные ОДУ высокого порядка и системы линейных ОДУ первого порядка. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общие решения однородной и неоднородной задач. Линейные однородные уравнения и системы с постоянными коэффициентами.

Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость по Ляпунову,

асимптотическая устойчивость. Простейшие типы точек покоя. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование на устойчивость по первому приближению.

IV. Теория функций и функциональный анализ.

Мера Лебега. Измеримые множества и их свойства. Измеримые функции и их свойства. Предел последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду и сходимость по мере. Интеграл Лебега и его свойства. Интегрируемость ограниченных измеримых функций. Связь с интегрируемостью по Риману. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега.

Метрические пространства. Полнота. Теорема о вложенных шарах. Теорема Хаусдорфа о пополнении. Принцип сжимающих отображений и его применения.

Нормированные пространства. Банаховы пространства. Теорема Хана - Банаха. Теорема Банаха - Штейнгауза. Сопряженное пространство. Слабая сходимость. Второе сопряженное пространство. Рефлексивные пространства и их свойства. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши - Буняковского. Существование ортогональных базисов, ортогонализация. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортогональные системы. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса - Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств. Теоорема Рисса - Фреше о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные и ограниченные линейные операторы. Норма ограниченного линейного оператора. Обратный оператор. Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Сопряженный оператор и его свойства. Самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы. Спектр линейного оператора. Резольвента. Резольвентное множество. Собственные значения. Свойства спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора.

V. Уравнения математической физики.

Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума. Единственность решения задачи Дирихле, непрерывная зависимость решения от данных задачи. Обобщенные решения. Решение задачи Дирихле методом Галеркина. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Решение начально-краевых задач методом Фурье. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний струны. Решение начально-краевых задач методом Фурье.

VI. Численные методы.

Источники и классификация погрешностей. Приближенные числа. Абсолют-ная и относительная погрешности. Погрешность арифметических операций над приближенными числами. Погрешность функции. Особенности машинной арифметики.

Методы решения нелинейных уравнений. Методы бисекции, простой итера-ции, Ньютона. Модификации метода Ньютона. Метод секущих. Прямые методы решения СЛАУ. Обусловленность задачи решения СЛАУ. Метод Гаусса. LU-разложение. Метод Холецкого. Метод прогонки. QR-разложение матрицы. Мето-ды вращений и отражений. Итерационные методы решения СЛАУ. Методы простой итерации, Зейделя, последовательной верхней релаксации. Метод сопря-женных градиентов. Методы отыскания решений систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Метод Ньютона. Модификации метода Ньютона.

Методы решения проблем собственных значений. Степенной метод. Метод обратных итераций. QR-алгоритм.

Методы одномерной и многомерной оптимизации. Понятие о методах спуска. Покоординатный спуск. Градиентный метод. Метод Ньютона

Полиномиальная интерполяция. Многочлен Лагранжа. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева. Конечные и разделенные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполяция сплайнами. Дискретное преобразование Фурье.

Простейшие формулы численного дифференцирования. Численное интегриро-вание. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Квадратурные формулы Гаусса. Апостериорные оценки погрешности. Адаптивные методы численного интегрирования.

Численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Метод Эйлера и его модификации. Методы Рунге - Кутты. Линейные многошаговые методы. Методы Адамса. Устойчивость методов решения задачи Коши. Жесткие задачи. Решение двухточечных краевых задач. Метод конечных разностей. Методы Ритца и Галеркина. Метод конечных элементов. Метод пристрелки.

Основные понятия теории разностных схем. Сетки. Сеточные функции. Разностные схемы и простейшие методы их построения. Аппроксимация, устойчивость и сходимость. Простейшие разностные схемы для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности и их свойства. Разностная схема для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Основная литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1,2. М.: Высшая школа. 1988.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань. , 2002, 482 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит. 2002 г.– 302 с.
4. Ильин В.А., Ким Г.Д., Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 320 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС. 2002. – 320 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Либроком. 2009.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ. 2004. -798с.
8. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. – 400с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М.: Физматлит. 2004. -572 с.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. М. Физматлит. 2002.
11. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М.: Изд. Дом МЭИ. 2008.

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. МГУ, М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

Дополнительная литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

3. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

5. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

Директор ИВТИ
к.т.н., доцент — Вишняков С.В.