Институт Информационных и вычислительных технологий

Направление подготовки 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Банк заданий по специальной части вступительного испытания в магистратуру (базовая часть)

Задание экзаменационного билета №1 (10 баллов)

Тема. Исследование функции. Провести полное исследование функции и построить эскиз ее графика:

1.1) $y = \frac{x^3-1}{x}$; 1.2) $y = x^2(x+1)^2$;

1.3) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$; 1.4) $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$;

1.5) $y = x^2e^x$; 1.6) $y = \frac{12x}{9+x^2}$;

1.7) $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$; 1.8) $y = ln\frac{x}{x+5} - 1$;

1.9) $y = \frac{x^2-1}{x}$; 1.10) $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$;

1.11) $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$; 1.12) $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$;

Построить график функции с помощью первой производной.

1.13) $y = x^3 - 3x^2$. 1.14) $y = 2x^3 - 6x$.

1.15) $y = x^4 - 2x^3 - 3$. 1.16) $y = x^3 - 27x$.

1.17) $y = 12x - x^3$. 1.18) $y = 1 - 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном отрезке.

1.19) $y = 2x^2 - x^4 + 1, \quad [-1; 2]$. 1.20) $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad [0; 3]$.

1.21) $y = x^3 + \frac{3}{x}, \quad [1/2; 2]$.

Найти наименьшее значение функции на указанном отрезке

1.22) $y = ln\, x + \frac{1}{x}, \quad [1/2; e]$.

Решение задачи 1.1.

1.1) $y = \frac{x^3-1}{x}$.

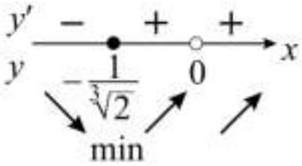
1. ОДЗ: $x \neq 0$.
2. $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \; x = 0$ – вертикальная асимптота.
3. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, периода нет, т.е. функция общего вида.
4. $y = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; точка $(1; 0)$ – точка пересечения с осью OX.
5. Найдем наклонные (горизонтальные) асимптоты:

$k = \lim\limits_{x=\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x=\pm\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty$, т.е. наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6. $y' = \left(\frac{x^3-1}{x}\right)' = \frac{3x^2x-(x^3-1)}{x^2} = \frac{2x^3+1}{x^2}$;

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$y' \nexists \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

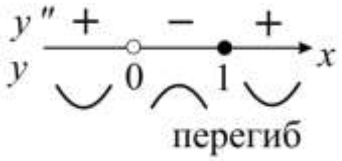


$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, т.е. $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ – точка минимума.

7. $y'' = \left(\frac{2x^3+1}{x^2}\right)' = \frac{6x^2x^2-(2x^3+1)2x}{x^4} = \frac{2x^4-2x}{x^4} = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$.

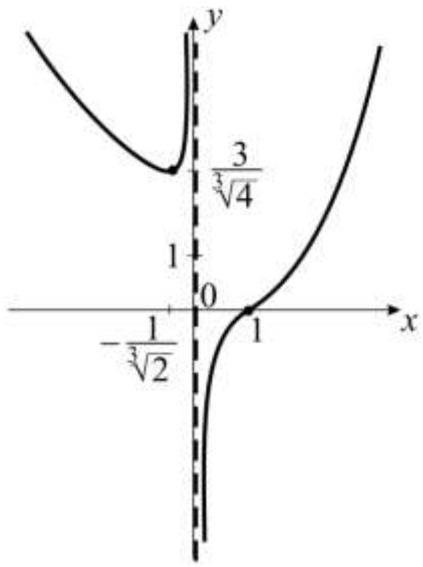
$$y'' = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$y'' \nexists \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$



$y(1) = 0$, т.е. точка $(1; 0)$ – точка перегиба.

8.



Задание экзаменационного билета №2 (10 баллов)

Тема 1. Определенный интеграл. Замена переменных.

2.1.1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$; 2.1.2) $\int_0^1 (2x+1)e^{x+2}dx$;

2.1.3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+2}$; 2.1.4) $\int_2^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

2.1.5) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x + 3\ln x}{x}dx$; 2.1.6) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x\, dx$;

2.1.7) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} dx$;

2.1.8) $\int_0^{\pi/4} tg^2\, x\, dx$;

2.1.9) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+3}}$;

2.1.10) $\int_0^1 e^{(x+e^x)} dx$.

2.1.11) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$.

2.1.12) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$.

2.1.13) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

2.1.14) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

2.1.15) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$.

2.1.16) $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4} dx$.

2.1.17) $\int_0^1 3(x^2+x^2 e^{x^3}) dx$

2.1.18) $\int_3^8 \sqrt{x+1} dx$.

2.1.19) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x\, dx$.

2.1.20) $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x}{\cos^2 x^2} dx$.

Решение задачи 2.1.4.

2.1.4) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_2^e \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_2^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = -\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_2^e = -\frac{1}{2\ln^2 e} + \frac{1}{2\ln^2 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 2} - 1\right).$$

Тема 2. Вычисление площадей плоских фигур.

2.2.1) Область ограничена кривыми: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3$. Найти ее площадь.

2.2.2) Область ограничена кривыми: $y = 4 - x^2$, $y = x^2$. Найти ее площадь.

2.2.3) Область ограничена кривыми: $y = x^2$, $x + y = 4$, $y = 0$. Найти ее площадь.

2.2.4) Область ограничена кривыми: $y^2 = x$, $x^2 = y$. Найти ее площадь.

2.2.5) Найти площадь фигуры, если ее границей является кривая $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

2.2.6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

2.2.7) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

2.2.8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\rho = \cos\varphi$.

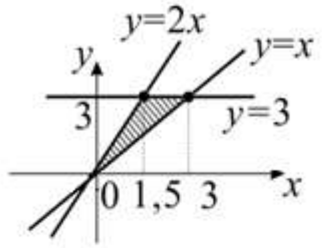
2.2.9) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\begin{cases} \rho = \varphi \\ \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

2.2.10) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.

2.2.11) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$.

Решение задачи 2.2.1.

2.2.1) $y = x; \quad y = 2x; \quad y = 3.$



Используем приложение двойного интеграла:

$$S_{\text{фигуры}} = \iint\limits_G dxdy = \int_0^3 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} dx =$$

$$\int_0^3 \left(y - \frac{y}{2}\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

или же, используем только определенный интеграл:

$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^{3/2} (2x - x)dx + \int_{3/2}^{3} (3 - x)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{3/2} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{3/2}^{3} =$$

$$= \frac{9}{8} - 0 + 9 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$

Задание экзаменационного билета №3 (10 баллов)

Составить таблицу данных и написать программу решения следующей задачи. Подготовить тесты, позволяющие всесторонне проверить составленную программу.

Задание 3.1.
Найти сумму и число тех элементов заданного массива X_1, X_2,...,Xn, которые попадают на заданный отрезок.

Задание 3.2.
Подсчитать по отдельности суммы C1 и C2 и количества M1 и M2 отрицательных и положительных элементов заданного одномерного массива.

Задание 3.3.
Выделяя из заданных элементов X_1,X_2,...,Xn положительные элементы, для которых к тому же справедливо неравенство $\sin(X_i) \leq 0$, найти число и произведение такого рода элементов.

Задание 3.4.
Найти сумму и общее количество тех элементов заданного массива X_1,X_2,...,Xn, абсолютная величина которых отличается от P не более, чем на T.

Задание 3.5.

Для заданного массива $X_1, X_2, ..., Xn$ найти среднее арифметическое CX элементов, имеющих четные номера, и при том положительных, а для заданного массива $Y_1, Y_2, ..., Yn$ найти среднее арифметическое CY элементов, имеющих нечетные номера, и притом отрицательных.

Задание 3.6
Найти значения квадратного трёхчлена $A X_i^2 + B X_i + C$ для n заданных значений аргумента X1, X2, …, Xn.

Пример решения задачи 3.1.
Таблица данных.

Имя	Содержание	Тип	Структура
Исходные данные			
P	Граница интервала	double	Переменная
Q	Граница интервала	double	Переменная
n	Количество элементов в массиве	int	Переменная
Mas1	Исходный массив	double	Массив
Промежуточные данные			
temp	Вспомогательная величина	double	Переменная
Результаты			
Kol	Искомое количество	int	Переменная
Sum	Искомая сумма	double	Переменная

Программа на C#

```
namespace Example1
{
classProgram
    {
        static void Main(string[] args)
        {
double[] Mas1;
            double P, Q, Sum, temp;
            int n, Kol = 0;
Console.Write("Леваяграница ");
            P = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.Write("Праваяграница ");
            Q = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
Console.Write("Количествоэлементов ");
            n = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            Mas1 = new double[n];
for(int i=0; i<Mas1.Length; i++)
            {
Console.Write("Элемент "+i + " ");
                Mas1[i] = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());
            }
            if (P >Q)
            {
                temp = Q;
                Q = P;
```

```
            P = temp;
        }
        Sum = 0;

for(int i=0; i<Mas1.Length; i++)
            if (P<=Mas1[i] && Mas1[i]<=Q)
{
                Sum += Mas1[i];
Kol++;
            }
      /*    // Второйвариант
foreach (double x in Mas1)
            if (P<=x && x<=Q)
            {
                Sum += x;
Kol++;
            }
        */
        if (Kol == 0)
Console.WriteLine("Искомыхэлементовнет");
else
Console.WriteLine("Сумма " + Sum + " Количество " + Kol);
Console.ReadLine();
      }
   }
}
```

Тесты.

1. P=5 Q=10 n=5
   Массив: 1; 6; 8; 12; 25 Ответ: сумма 14, количество 2
2. P=10 Q=5 n=5
   Массив: 1; 6; 8; 12; 25 Ответ: сумма 14, количество 2
3. P=5 Q=10 n=5
   Массив: 1; 61; 83; 12; 25 Ответ: Искомых элементов нет
4. P=10 Q=5 n=5
   Массив: 1; 61; 83; 12; 25 Ответ: Искомых элементов нет

Задание экзаменационного билета №4 (10 баллов)

Тема. «Составление логических выражений на основе таблицы истинности»

Дана таблица истинности логической функции.

Номер набора	X1	X2	X3	X4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1

13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Задание 4.1.
Составить дизъюнктивную нормальную форму и минимизировать ее.

Задание 4.2.
Составить конъюнктивную нормальную форму и минимизировать ее.

Задание 4.3.
Составить дизъюнктивную совершенную нормальную форму и минимизировать ее.

Задание 4.4.
Составить конъюнктивную совершенную нормальную форму и минимизировать ее.

Задание 4.5.
Написать минимальное представление этой функции с помощью операций И ИЛИ НЕ.

Задание 4.6
Дана таблица истинности логической функции.

Номер набора	X1	X2	X3	X4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Составить карту Карно для данной функции.

Решение задачи 4.6

1. Находим ДНФ
2. Строим карту.

$x_{1}x_{2} \backslash x_{3}x_{4}$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	1

Разработчики:

доцент кафедры ПМИИ Чернецов А.М.

ст. преп. кафедры МКМ Крупин Г.В.

Директор ИВТИ Вишняков С.В.

Институт Информационных и вычислительных технологий

Направление подготовки 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Банк заданий по специальной части вступительного испытания в магистратуру (специальная часть)

Задание экзаменационного билета №5 (10 баллов)

Задание 5.1.
Погрешности. Абсолютная и относительная погрешности приближенного значения. Погрешности суммы, разности, произведения и частного.

Задание 5.2.
Метод бисекции численного решения нелинейного уравнения: описание метода, свойства.

Задание 5.3.
Метод простой итерации численного решения нелинейного уравнения: описание метода, свойства.

Задание 5.4.
Метод Ньютона численного решения нелинейного уравнения: описание метода, свойства.

Задание 5.5.
Метод Гаусса численного решения системы линейных алгебраических уравнений: описание метода, свойства.

Задание 5.6.
Метод простой итерации численного решения системы линейных алгебраических уравнений: описание метода, свойства.

Задание 5.7.
Метод Зейделя численного решения системы линейных алгебраических уравнений: описание метода, свойства.

Задание 5.8.
Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Явный и неявный методы Эйлера.

Задание 5.9.
Метод конечных разностей. Аппроксимация, устойчивость и сходимость.

Задание 5.10.
Разностная схема решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка и ее свойства.

Пример: план ответа на задание 5.10.
1. Постановка первой краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.
2. Построение сетки и введение сеточных функций.
3. Построение разностной схемы. Получение системы сеточных уравнений.

4. Устойчивость, аппроксимация и сходимость полученной разностной схемы.
5. Доказательство второго порядка аппроксимации дифференциального уравнения.

Задание экзаменационного билета №6 (10 баллов)

Тема 1 «Математический анализ»

Задание 6.1.
Дать определение предела числовой последовательности. Доказать, исходя из определения предела числовой последовательности, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-1}=\frac{1}{2}.$$

Задание 6.2.
Дать определение фундаментальной числовой последовательности. Сформулировать критерий Коши сходимости числовой последовательности. Используя критерий Коши, доказать, что
а) последовательность

$$x_n=\frac{\cos 1}{2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{2^n}, n\in \mathrm{N},$$

сходится;
б) последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, n\in \mathrm{N},$$

расходится.

Задание 6.3.
Дать определения непрерывности функции в точке. Доказать, исходя из определения непрерывности функции в точке, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{x\sin(3/(5x))}-1, & \text{если } x\neq 0; \\ 0, & \text{если } x=0; \end{cases}$$

непрерывна в точке $x=0$.

Задание 6.4 (ответ: $f'(0)$ не существует).
Дать определение производной функции в точке. Исходя из определения, найти производную $f'(0)$ или показать, что она не существует.

$$f(x)=\begin{cases} \sin(x\sin(3/x)), & \text{если } x\neq 0; \\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

Задание 6.5.
Дать определение равномерной сходимости функционального ряда на заданном множестве. Сформулировать признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Используя признак Вейерштрасса, доказать, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^2x)}{n\sqrt{n}}$$

равномерно сходится на всей числовой прямой.

Задание 6.6.
Дать определение предела функции многих переменных. Доказать, что

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y^2}{3x^4+y^4}$$

не существует.
Задание 6.7.
Дать определение непрерывности в точке функции многих переменных. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \qquad \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Задание 6.8 (ответ: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$).
Дать определение частной производной первого порядка функции многих переменных. Используя определение найти все частные производные первого порядка в точке $(0,0)$ функции $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

Задание 6.9.
Дать определение дифференцируемости в точке функции многих переменных. Используя это определение доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Задание 6.10 (ответ: $z_{min}=z\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{108}$).
Сформулировать необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных. Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$$z(x,y)=x^2-2xy+4y^3.$$

Пример:план ответа на задание 6.5.
1. Определение равномерной сходимости функционального ряда на заданном множестве.
2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
3. Решение примера. Так как для всех $x\in$ Rи для всех $n\in$ Nвыполняется неравенство $|\mathrm{arctg}(n^2x)|<\pi/2$, то $|u_n(x)|<\pi/(2n^{3/2})$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на R.

Пример: план ответа на задание 7.9.
1. Определение дифференцируемости в точке функции многих переменных.
2. Решение примера. Найдем приращение функции f в точке $(0,0)$:

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}$$

и вычислим частные производные в точке $(0,0)$. Так как $f(x,0)=0$и $f(0,y)=0$, то

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$$

Предположим, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$, тогда с силу определения справедлива формула

$$\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),(\Delta x,\Delta y)\to(0,0),$$

но эта формула неверна, так как

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0.$$

В самом деле, при $\Delta y=\Delta x\to 0$ получаем

$$\frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{|\Delta x|\sqrt{2}} \to +\infty.$$

Следовательно, данная функция в точке $(0,0)$ не дифференцируема.

Тема 2 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Задание 6.11 (ответ:$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x}{y}=C$).

Дать определение уравнения в полных дифференциалах. Сформулировать необходимое и достаточное условие того, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Доказать, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найти общий интеграл.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$$

Задание 6.12(ответ: а) решение существует и единственно; б) решение существует, единственности решения нет).

Сформулировать теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Что можно сказать о существовании и единственности решения данной задачи Коши? Ответ обосновать.

$$\text{а) } \begin{cases} y' = ye^{-x^2}, \\ y(0)=0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y' = \sqrt[3]{(y-x)^2}+1, \\ y(1)=1. \end{cases}$$

Задание 6.13.

Дать определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Исходя из определений, доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x-y; \\ y(0)=1; \end{cases}$$

асимптотически устойчиво.

Задание 6.14.

Дать определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Исходя из определений, доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x-1; \\ y(0)=-1; \end{cases}$$

устойчиво по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивым.

Задание 6.15.

Дать определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Доказать, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x(y-1); \\ y(0)=1; \end{cases}$$

неустойчиво.

Пример: план ответа на задание 6.11.

1. Определение уравнения в полных дифференциалах.

2. Необходимое и достаточное условие того, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.
3. Решение примера. Дифференциальное уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, если выполняется условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

$$M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y}, \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{1}{y^2};$$

$$N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2}, \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{1}{y^2}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2}.$$

Найдем,

$$u(x,y) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y}\right) dx = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{y} + \varphi(y).$$

Чтобы найти неизвестную функцию $\varphi(y)$ воспользуемся равенством $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2}.$$

Откуда, $\varphi'(y) = 0$ и, следовательно, $\varphi(y) = \mathrm{const}$. Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x}{y} = C.$$

Задание экзаменационного билета № 7 (10 баллов)

Составить таблицу данных и написать программу решения следующей задачи. Подготовить тесты, позволяющие всесторонне проверить составленную программу.

Задание 7.1.
Найти среднее арифметическое неотрицательных элементов матрицы, а также подсчитать, сколько таких элементов в каждой отдельно взятой строке матрицы.

Задание 7.2.
Изменить все строки матрицы, в которых отрицателен элемент главной диагонали: к каждому элементу i-й строки прибавляется элемент T_i из заданного массива $T_1,T_2,...,T_n$. Подсчитать число измененных строк матрицы.

Задание 7.3.
Получить массив $C_1,C_2,...,C_n$ по правилу: $C_i=0$, если все элементы i-го столбца матрицы равны 0, иначе $C_i=1$. Найти также сумму всех элементов матрицы.

Задание 7.4.
Найти среднее арифметическое отрицательных элементов матрицы, лежащих ниже главной диагонали, и среднее арифметическое всех элементов главной диагонали.

Задание 7.5.
Изменить матрицу, заменив каждый отрицательный элемент, лежащий выше главной диагонали, его абсолютной величиной. Найти также сумму элементов главной диагонали.

Задание 7.6.
Дана матрица *A*. Определить число нулевых элементов в каждой строке матрицы и общую сумму элементов**.**

Решение задачи 7.6

Состав данных

Имя	**Смысл**	**Тип**	**Структура**
	Исходные данные		
A	заданная матрица	веществ.	двумерный массив
	Выходные данные		
K	число нулевых элементов в каждой строке матрицы	веществ.	одномерный массив
S	Общая сумма элементов матрицы	веществ.	простая переменная
	Промежуточные данные		
n	число строк матрицы	целый	простая переменная
m	число столбцов матрицы	целый	простая переменная
i	счетчик строк матрицы	целый	простая переменная
J	счетчик столбцов матрицы	целый	простая переменная
Num	Число нулевых элементов в строке	целый	простая переменная

Кодирование на языке Си

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>

#define N 40
#define M 50
int main ()
{
 FILE *fpin, fpout;
 float A[N][M]
 int, n, m, i, j, Num;
 float K[N];

 if ((fpin = fopen("input.txt", "r"))==NULL) {
 printf("Cannot open input file.\n");
  return 1;
}

    fscanf(fpin,“%d”,&n);
    fscanf(fpin,“%d”,&m);

if( n*m>0 && (n<N)&& (m<M){

 for (i=0; i<n; i++)     // ввод матрицы

       for (j=0;j<m; j++) {
         fscanf(fpin,“%f”,&A[i][j]);
  }
 Printf(“ Матрица A: \n”);
 for (i=0; i<n; i++)     // вывод матрицы
     {
       for (j=0;j<m; j++) {
         printf(“%f”,A[i][j]); }
       printf(“\n”);
    }

fclose(fpin);  //Закрыть входной файл

//Присвоение начального значения
```

```
..../*действия ниже **можно** внести в цикл  */
 For(i=0;i<N;i++)
   K[i]=0.;
S=0.;

for (j=0;j<m; j++) {
             Num=0;  // начальное значение числа нулевых элементов в строке
             for (i=0; i<n; i++) {
                          S+=A[i][j];
         if (A[i][j] == 0) Num++;
    }
        if (Num >0 ) K[j]=Num;
}
    cout<<“s=“<<S<<“;
    cout <<”Результат”<<;
    for(i=0;i<n; i++)
    {
        cout << K[“<<i<<”]=“<<K[i];
    }

if ((fpout = fopen("output.txt", "w"))==NULL) {
 printf("Cannot open output file.\n");
  return 1;
}

fprintf (fpout,”%d”, S);
 fprintf (fpout, “Результат массив K”);
    for(i=0;i<n; i++)
    {
        fprintf(fpout, “ K[“%d”, i ,”]=“%f”, K[i] );
    }

}
else
   printf("Incorrect input borders \n");


//закрыть выходной файл, обязательно!
fclose(fpout);

getch();

    return 0;
}
```

Тесты.

n=100, m=200

n=-3, m=-5

n=5, m=5.

Матрица: $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ответ: сумма всех элементов 42.

Число нулевых элементов в каждой строке: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Задание экзаменационного билета № 8 (10 баллов)

Тема. «Преобразование логических выражений»

Задание 8.1.
Выясните, тождественны или не тождественны функции *f(x,y,z)*и*g(x,y,z)*:

$$f(x,y,z) = (x \to y)(\bar{z} \vee y) \quad g(x,y,z) = y \vee \bar{x}\ \bar{z}$$

Задание 8.2.
Выясните, тождественны или не тождественны функции *f(x,y,z)*и*g(x,y,z)*:

$$f(x,y,z) = (x+y)(x \equiv z) \quad g(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$$

Задание 8.3.
Упростите логическое выражение

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$$

Задание 8.4.
Упростите логическое выражение

$$f(x,y,z) = \overline{\left(\left(\overline{(\bar{z} \to x)} \to (\bar{y} \to \bar{z})\right) \to \left(\overline{\overline{\bar{x} \to y} \to \bar{x}} \wedge (x \leftrightarrow z)\right)\right)} \to \overline{x \vee y}$$

Задание 8.5.
Упростите логическое выражение

$$f(x,y,z) = \overline{\left(x \wedge (y \to z)\right)}$$
$$\to \overline{\left(\left(\overline{(\bar{z} \to x)} \wedge \overline{(z \to y)}\right) \to \left(\left((x \vee y) \to (y \to z)\right) \wedge \overline{\overline{\bar{x} \to y} \to \bar{x}}\right)\right)}$$

Пример решения:

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{x\bar{y}} \vee y} \vee \left(\left((\bar{z} \to x) \vee (z \to y)\right) \to \left(\overline{\overline{\bar{x} \to y} \to \bar{x}} \wedge (x \oplus y \oplus z)\right)\right)$$
$$= \overline{x \vee \bar{y} \vee y} \vee \left(\left((z \vee x) \vee (\bar{z} \vee y)\right) \to \left(\overline{\overline{\bar{x} \to y} \to \bar{x}} \wedge (x \oplus y \oplus z)\right)\right)$$
$$= \bar{1} \vee \left((1) \to \left(\overline{\overline{x \vee y} \to \bar{x}} \wedge (x \oplus y \oplus z)\right)\right)$$
$$= 0 \vee \left(1 \to \left(\overline{\overline{x \vee y} \to \bar{x}} \wedge (x \oplus y \oplus z)\right)\right) = \overline{x \vee y \vee \bar{x}} \wedge (x \oplus y \oplus z)$$
$$= 0 \wedge (x \oplus y \oplus z) = 0$$

Задание 8.6
Выясните, тождественны или не тождественны функции *f(x,y,z)*и *g(x,y,z)*:

$$f(x,y,z) = (x+y)(\bar{x} \equiv z) \quad g(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee xz$$

Тема 2. «Теория игр»

В таблице представлена некоторая конфликтная ситуация (игра) между сторонами (игроками) A и B:

1) Проверьте наличие седловой точки. В случае обнаружения найдите игры решение в чистых стратегиях, дайте рекомендации игрокам A и B по выбору стратегий;
2) В случае отсутствия седловой точки, упростите исходную матрицу, методом Лагранжа найдите решение в смешанных стратегиях, дайте рекомендации игрокам A и B по выбору стратегий на основе полученных значений;

Ответ должен содержать: стратегии сторон A и B, цену игры, а также рекомендации.

Задание 8.7

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
B1	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B2	12	-23	12	-23	40	7	100
B3	2	-21	34	-21	10	-22	35
B4	31	6	33	6	31	-3	50
B5	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B6	12	-23	12	-23	40	7	99
B7	-2	-21	-34	-21	-10	-22	-35

Задание 8.8

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
B1	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B2	12	-12	12	-12	40	7	100
B3	2	-21	34	-21	10	-22	35
B4	31	6	33	6	31	-2	50
B5	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B6	12	-12	12	-12	40	7	99
B7	-2	-21	-34	-21	-10	-22	-35

Задание 8.9

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
B1	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B2	12	-14	12	-14	40	7	100
B3	2	-21	34	-21	10	-22	35
B4	31	6	33	6	31	-4	50
B5	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B6	12	-14	12	-14	40	7	99
B7	-2	-21	-34	-21	-10	-22	-35

Задание 8.10

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**
B1	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B2	12	-16	12	-16	40	7	100
B3	2	-21	34	-21	10	-22	35
B4	31	6	33	6	31	-1	50
B5	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B6	12	-16	12	-16	40	7	99
B7	-2	-21	-34	-21	-10	-22	-35

Задание 8.11

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
B1	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B2	12	-17	12	-17	40	7	100
B3	2	-21	34	-21	10	-22	35
B4	31	6	33	6	31	-2	50
B5	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B6	12	-17	12	-17	40	7	99
B7	-2	-21	-34	-21	-10	-22	-35

Задание 8.12

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
B1	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B2	12	-9	12	-9	40	7	100
B3	2	-21	34	-21	10	-22	35
B4	31	6	33	6	31	-4	50
B5	-1	-20	10	-20	9	-21	-10
B6	12	-9	12	-9	40	7	99
B7	-2	-21	-34	-21	-10	-22	-35

Методы решения матричных игр.

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа относится к точным методам решения матричных игр G(m×m), т.е. имеющим квадратные матрицы (или приведенные к такому виду после упрощения).

Допустим, что игрок *A* использует смешанную стратегию *SA = (P1, …, Pm)*, а игрок *B* отвечает своей чистой стратегией B_i $(i = 1, 2, …, m)$. Цена игры в таком случае равна $V_i = p_1a_{1i} + p_2a_{2i} + … + p_ma_{mi}$.

Если же игрок B также будет применять смешанную стратегию SB = (q1, …, qm), то итоговая цена игры будет равна $V_i = q_1(p_1a_{11} + p_2a_{21} + … + p_ma_{m1}) + … + q_m(p_1a_{1m} + p_2a_{2m} + … + p_ma_{mm})$.

Для нахождения оптимального решения необходимо максимизировать значение V при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,, \forall i: 0 \le p_i \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1\,, \forall j: 0 \le p_j \le 1$$

Составим функцию Лагранжа

$L = V + \lambda_1(p_1 + … + p_m - 1) + \lambda_2(q_1 + … + q_m - 1)$ и приравняем к нулю частные производные по всем аргументам:

$$\frac{dL}{dp_1} = 0 \quad ... \quad \frac{dL}{dp_m} = 0$$

$$\frac{dL}{dq_1} = 0 \quad ... \quad \frac{dL}{dq_m} = 0$$

А также:

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = 0 \quad \frac{dL}{d\lambda_2} = 0$$

Решив получившуюся систему из *(2m+2)* уравнений с *(2m+2)* неизвестными, получим решение:

$SA(0, \frac{5}{18}, 0, \frac{13}{18}, 0, 0, 0)$

$SB(0, \frac{11}{36}, 0, 0, 0, \frac{25}{36}, 0)$
$V = -\frac{17}{18}$

Отметим, что выигрыш может быть и отрицательным.

Задание экзаменационного билета № 9 (10 баллов)

Тема 1. «Программирование, операционные системы и базы данных»

Задание 9.1.
Понятие алгоритма, свойства алгоритма, способы представления алгоритмов.

Задание 9.2.
Базовые конструкции структурного программирования и их реализация на языках программирования.

Задание 9.3.
Типы циклов (арифметическая прогрессия, итерационный) и их программная реализация. Цикл с предусловием и постусловием.

Задание 9.4.
Функции и процедуры, их назначение, структура. Глобальные, локальные переменные. Формальные и фактические параметры, их разновидности, применение.

Задание 9.5.
Объектно-ориентированное программирование. Понятия класса (структура класса), объекта; их объявление. Свойства ООП (инкапсуляция, наследование, полиморфизм). Виртуальные методы.

Примечание. На вопросы, связанные с программированием, можно ответить на примере одного из языков C++, C#, Python или Pascal-Delphi по выбору экзаменующегося

Тема 2. «Операционные системы»

Задание 9.6.
Концепции проектирования современных ОС. Обработка прерываний.

Задание 9.7.
Стратегии распределения памяти в операционных системах. Виртуальная память. Страничное, сегментное, сегментно-страничное распределение. Стратегии замещения страниц.

Задание 9.8.
Общая структура ОС. На примере ОС WINDOWS или UNIX по выбору экзаменующегося.

Задание 9.9.
Синхронизация параллельных процессов. Семафоры и мониторы. Тупики. Методы предотвращения, обхода и обнаружения тупиков.

Задание 9.10.
Стратегии распределения памяти. Виртуальная память. Страничное, сегментное, сегментно-страничное распределение. Стратегии замещения страниц.

Тема 3. «Базы данных»

Задание 9.11.
Понятия базы данных, системы управления базами данных.

Задание 9.12.
Реляционная модель данных. Базовые операции на реляционной модели: селекция, проекция, соединение.

Задание 9.13.
Проблема нормализации на реляционной модели. Нормальные формы и их практическое значение.

Задание 9.14.
Ключ и вторичные индексы в реляционной базе данных, их назначение, критерии выбора.

Задание 9.15.
Язык SQL: назначение, структура программы, операции и критерии извлечения данных. Операции группировки и соединения.

Пример ответа на вопрос 10.2.

1. Перечислить 3 базовых конструкции структурного программирования. Дать их краткую характеристику.
2. Написать их реализации на одном языке программирования. разъяснить, когда необходимо использование блока, как это делать.

Задание экзаменационного билета № 10 (10 баллов)

Тема 1. «Архитектура компьютеров и компьютерных систем»

Задание 10.1.
Базовые характеристики ЭВМ и систем: быстродействие и производительность, надежность.

Задание 10.2.
Системы счисления; перевод чисел из одной в другую; формы и форматы представления информации в ЭВМ.

Задание 10.3.
Машинные коды и их использование при выполнении арифметических операции над числами с фиксированной, плавающей точками, над двоично-десятичными кодами чисел.

Задание 10.4.
Элементы и узлы ЭВМ: комбинационные схемы (шифраторы, дешифраторы, сумматоры и схемы с памятью (триггер, регистр, счетчик).

Задание 10.5.
Методы минимизации и техническая интерпретация логических функций.

Тема 2 «Элементы дискретной математики»

Задание 10.6.
Элементарные функции алгебры логики (ФАЛ): дизъюнкция, конъюнкция, отрицание.

Задание 10.7.
Правила преобразования ФАЛ: закон де Моргана, коммутативность, дистрибутивность.

Задание 10.8.
ФАЛ: стрелка Пирса, импликация, эквивалентность, их выражение через дизъюнкцию, конъюнкцию, отрицание.

Задание 10.9.
Постановка задачи минимизации ФАЛ. Методы минимизации (подробно описать один метод).

Задание 10.10.
Принципы построения и составные части исчислений. Исчисление высказываний как формальная система.

Пример ответа на вопрос 10.2

1. Дать определение системы счисления.
2. Описать правила перехода между системами счисления 10->2, 2->10.
3. Представление в памяти ЭВМ чисел с фиксированной и плавающей точкой.
4. Как дополнение можно описать 16-ричную систему.

Тема 3. «Основы искусственного интеллекта»

Задание 10.11.

Основные отличия данных и знаний. Специфика человеческого мышления (рассуждений).
Задание 10.12.
Модели представления структурированных знаний: фреймы, онтологии. Понятие онтологии. Задачи,решаемые с помощью онтологий.
Задание 10.13.
Основные этапы развития ИИ и ИС: логическая и эвристическая парадигмы; системы, основанные на знаниях; интеллектуализация компьютеров; интегрированные, гибридные, динамические ИС (ЭС), ЭС реального времени; направления 2000-х годов.
Задание 10.14.
Модели представления знаний, задача эвристического поиска, типы решаемых задач.
Задание 10.15.
Сравнительные характеристики моделей представления знаний, интегрированные/гибридные модели.

Решение варианта №10.11

Основные отличия данных и знаний. Специфика человеческого мышления (рассуждений).

Данные – отдельные факты, характеризующие объекты, процессы, явления предметной области, а также, их свойства.

Знания – закономерности предметной области (принципы, связи, законы), полученные в результате практической деятельности и профессионального опыта, позволяющие специалистам ставить и решать задачу в этой предметной области.

Отличия данных от знаний:

- ✓ Интерпретируемость знаний. Данные интерпретируются алгоритмом их обработки.
- ✓ Структурируемость знаний. Данные не структурированы или слабо структурированы. Знания – как правило, структурированы. Поверхностные знания слабо структурированы (продукционные правила), глубинные знания сильно структурированы (семантические сети, фреймы, онтологии).
- ✓ Ситуативность и динамичность знаний. Данные статичны и неситуативны.
- ✓ Наличие статуса истинности. Данные достоверны. Знания правдоподобны.
- ✓ Шкалируемость знаний Имеются серые (непрерывные) и черно-белые (с точкой разрыва в середине) шкалы.
- ✓ Утверждения про погоду: *«Холодно», «Жарко»* быть спроецированы на ось Т, в то же время для каждого они индивилуальны.
- ✓ Данные – пассивны. Знания – активны;

Системы, основанные на данных (СОД):

Решение = данные + алгоритм.

Системы, основанные на знаниях (СОЗ):

Решение = знания + вывод (рассуждения) на знаниях+ обоснование.

Специфика человеческого мышления

Левополушарное мышление отвечает за рациональное мышление (вычислитель):

- дедукцию;
- классическую аргументацию.

Правополушарное мышление отвечает за творческое мышление (образное):

- индукцию (метод проверки гипотез);
- абдукцию (поиск гипотез, способных объяснить тот или иной факт);
- субъективную аргументацию: (расстановка весов утверждений может быть индивидуальна).

Рассуждение на основе здравого смысла (Common sense reasoning):

- по аналогии;
- на основе прецедентов (ситуаций, которые имели место в прошлом);

Рассуждение на основе веры (убеждений) (Belief):

- современный ИИ не способен формировать устойчивые убеждения. Поведение нейросетей может зависеть от случайных факторов и формулировок запросов. Одна и та же модель в разных условиях может поддерживать диаметрально противоположные взгляды.

Разработчики:

доцент кафедры ПМИИ Чернецов А.М.

ст. преп. кафедры МКМ Крупин Г.В.

Директор ИВТИ Вишняков С.В.