Институт ИВТИ
Направление подготовки 27.04.04 Управление в технических системах

Банк заданий по специальной части вступительного испытания в магистратуру

Задание экзаменационного билета № 6 (5 баллов)

Тема 1 Основные понятия и принципы управления

Задание 6.1 (теоретическое)
Принципы автоматического управления: по возмущению и комбинированный; их преимущества и недостатки.

Задание 6.2 (теоретическое)
Принцип автоматического управления по отклонению; его преимущества и недостатки.

Тема 2 Характеристики линейных динамических звеньев и систем

Задание 6.3 (теоретическое)
Понятие динамического звена. Дифференциальные уравнения и передаточные функции типовых динамических звеньев.

Задание 6.4 (теоретическое)
Временные характеристики линейных динамических звеньев и систем (переходная и весовая функции). Примеры.

Задание 6.5 (задача)
Построить АФХ (годограф) системы с заданной передаточной функцией

1) $W(p)=\dfrac{10(1+p)}{(1+5p)(1+0{,}1p)}$,
2) $W(p)=\dfrac{10(1+3p)}{p^2+2p+1}$,
3) $W(p)=\dfrac{10(1+p)}{(p^2+5p+6)(1+0{,}1p)}$,
4) $W(p)=\dfrac{100(1+p)}{(1+3p)(1+2p)}$,
5) $W(p)=\dfrac{100(1+p)^2}{p^2(1+10p)(1+0{,}1p)^2}$.

Пример выполнения задания 6.5
Построить АФХ (годограф) для системы с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{1000(1+p)}{p(1+10p)(1+0{,}1p)}$$

Решение:

Построение АФХ проводится по амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам. Выражения для них имеют вид:

$$A(\omega) = \frac{1000\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+(10\omega)^2}\sqrt{1+(0{,}1\omega)^2}}$$

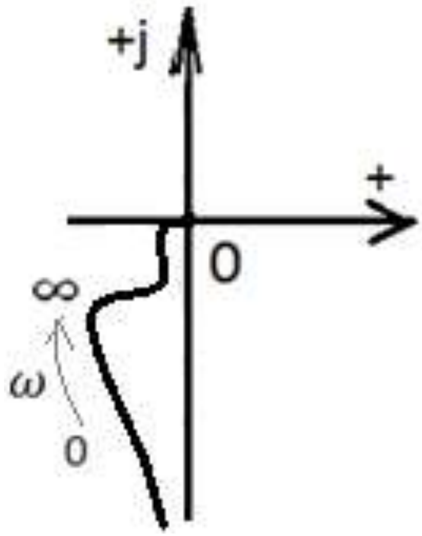
$$\varphi(\omega) = arctg\omega - \frac{\pi}{2} - arctg10\omega - arctg0{,}1\omega$$

Определим значения АЧХ и ФЧХ в нуле и на бесконечности:

$$A(0) = \infty \qquad A(\infty) = 0$$

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} \qquad \varphi(\infty) = -\pi$$

АФХ рассматриваемой системы имеет вид:



Ответ: В соответствии с заданной передаточной функцией системы автоматического управления построена АФХ.

Тема 3 Анализ качества регулирования в линейных непрерывных системах автоматического управления

Задание 6.6 (теоретическое)
Прямые показатели качества переходного процесса в линейной непрерывной системе автоматического управления.

Задание экзаменационного билета № 7 (5 баллов)

Тема 1 Модели описания систем и их преобразование

Задание 7.1 (теоретическое)
Понятие математической модели системы автоматического управления. Формы представления математических моделей: модель «вход-выход», модель в форме уравнений состояния, структурная схема.

Тема 2 Устойчивость линейных непрерывных систем автоматического управления

Задание 7.2 (задача)

Исследовать на устойчивость замкнутую линейную непрерывную систему автоматического управления с помощью критерия Гурвица, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

1) $W_p(p) = \dfrac{K(1+T_4 p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)}$, $K = 10$, $T_1 = 0{,}1$, $T_2 = 0{,}5$, $T_3 = 1$, $T_4 = 0{,}01$;

2) $W_p(p) = \dfrac{100}{(2p^2 + 2p + 1)(1+p)}$;

3) $W_p(p) = \dfrac{10(1+p)}{p^2(1+2p)}$;

4) $W_p(p) = \dfrac{10}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0{,}1$;

5) $W_p(p) = \dfrac{K(1+T_2 p)}{p(1+p)(1+T_1 p)}$, $K = 50$, $T_1 = 0{,}1$, $T_2 = 0{,}5$.

Задание 7.3 (теоретическое)
Критерий Льенара-Шипара устойчивости линейных непрерывных систем автоматического управления.

Задание 7.4 (теоретическое)
Критерий Рауса устойчивости линейных непрерывных систем автоматического управления.

Пример выполнения задания 7.2
Исследовать на устойчивость замкнутую линейную непрерывную систему автоматического управления с помощью критерия Гурвица, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{K}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)},\ K = 10,\ T_1 = T_2 = T_3.$$

Решение:

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$W_3(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{W_p}(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{B_3(\mathrm{p})}{A_3(\mathrm{p})}.$$

Определим передаточную функцию замкнутой системы и запишем по ней характеристический полином замкнутой системы:

$A_3(\mathrm{p}) = (1 + p\mathrm{T}_1)(1 + \mathrm{pT}_2)(1 + \mathrm{pT}_3) + \mathrm{k}$,

$A_3(\mathrm{p}) = \mathrm{T_1T_2T_3p^3} + (\mathrm{T_1T_2} + \mathrm{T_2T_3} + \mathrm{T_1T_3})\mathrm{p^2} + (\mathrm{T_1} + \mathrm{T_2} + \mathrm{T_3})\mathrm{p} + \mathrm{k} + 1$,

$A_3(\mathrm{p}) = a_0\mathrm{p}^3 + a_1\mathrm{p}^2 + a_2\mathrm{p} + a_3$,

где $a_0 = \mathrm{T_1T_2T_3}$, $a_1 = \mathrm{T_1T_2} + \mathrm{T_2T_3} + \mathrm{T_1T_3}$, $\mathrm{a}_2 = \mathrm{T_1} + \mathrm{T_2} + \mathrm{T_3}$, $\mathrm{a}_3 = k + 1$.

Для устойчивости системы 3-го порядка по Гурвицу необходимо и достаточно, чтобы были положительны все коэффициенты характеристического полинома и определитель Гурвица второго порядка.

Положительность коэффициентов $\mathrm{a}_{0,}, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$ выполняется.

Составим определитель Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Для устойчивости системы должно выполнятся условие:
$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$,
что эквивалентно

$$(k+1)T_1T_2T_3 < \left(T_1+T_2+T_3\right)\left(T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3\right). \qquad (*)$$

Предельным называется такой коэффициент усиления, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости – $k_{\text{пред}}$. Он находится из условия равенства нулю определителя 2-го порядка (неравенство (*) обращается в равенство):

$$k_{пред} = \left(1+\frac{T_1}{T_3}+\frac{T_2}{T_3}\right)\left(1+\frac{T_3}{T_2}+\frac{T_3}{T_1}\right)-1.$$

В рассматриваемой задаче $T_1 = T_2 = T_3$, а значит, $k_{пред} = 8$. Таким образом, система неустойчива, так как $k = 10 > k_{пред}$.
Ответ: система автоматического управления неустойчива.

Тема 2 Метод фазовой плоскости исследования динамики нелинейных систем автоматического управления

Задание 7.5 (теоретическое)
Метод фазовой плоскости исследования динамики систем автоматического управления: его возможности и ограничения, свойства фазовых траекторий.

Тема 3 Дискретные системы автоматического управления

Задание 7.6 (теоретическое)
Виды квантования и модуляции сигналов. Эквивалентная структурная схема импульсной системы автоматического управления.

Задание экзаменационного билета № 8 (5 баллов)

Тема 1 Основные понятия информационных технологий

Задание 8.1 (теоретическое)
Классификация программного обеспечения (ПО) автоматизированной системы по назначению. Классы программных средств по способу распространения, доступности кода, способу создания ПО.

Задание 8.2 (теоретическое)
Классы языков программирования. Языки программирования C/C++ - характеристика, возможность применения при разработке и исследовании систем управления.

Задание 8.3 (теоретическое)
Задача обеспечения «цифрового суверенитета» нашей страны. Импортозамещение в области компьютерной техники.

Тема 2 Программные средства для решения задач моделирования, исследования и разработки систем управления

Задание 8.4 (теоретическое)
Назначение MATLAB. Положение в классификации ПО. История создания.

Задание 8.5 (теоретическое)

Назначение среды R. Положение в классификации ПО.
История создания. Архитектура. Стандартные и пользовательские программы.

Тема 3 Системы управления базами данных (СУБД)

Задание 8.6 (теоретическое)
СУБД, их назначение, классификация и основные функции.

Задание экзаменационного билета № 9 (5 баллов)

Тема Статистический анализ данных

Задание 9.1 (теоретическое)
Понятия генеральной совокупности и выборки. Основные способы формирования выборок.

Задание 9.2 (теоретическое)
Многомерное нормальное распределение.

Задание 9.3 (теоретическое)
Понятие ковариации и корреляции случайных величин и расчет их оценок.

Задание 9.4 (теоретическое)
Виды функций регрессии, используемые в регрессионном анализе.

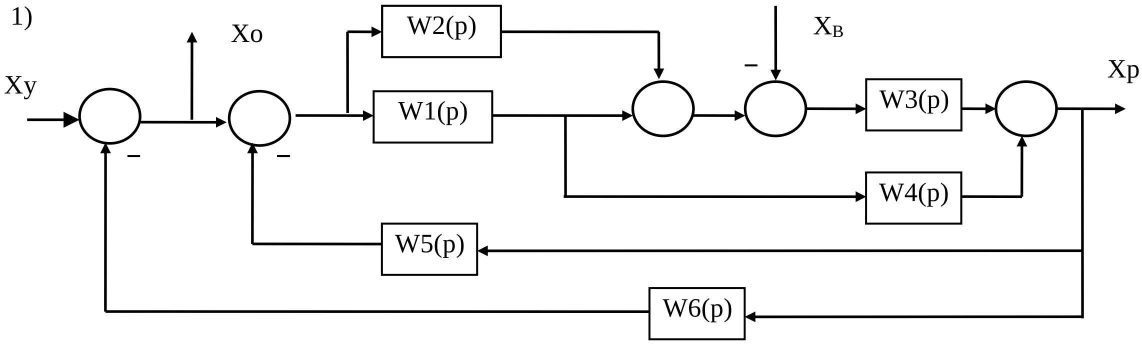
Задание 9.5 (теоретическое)
Виды функций потерь, используемые в регрессионном анализе.

Задание 9.6 (теоретическое)
Уравнение регрессии в стандартизированной форме.

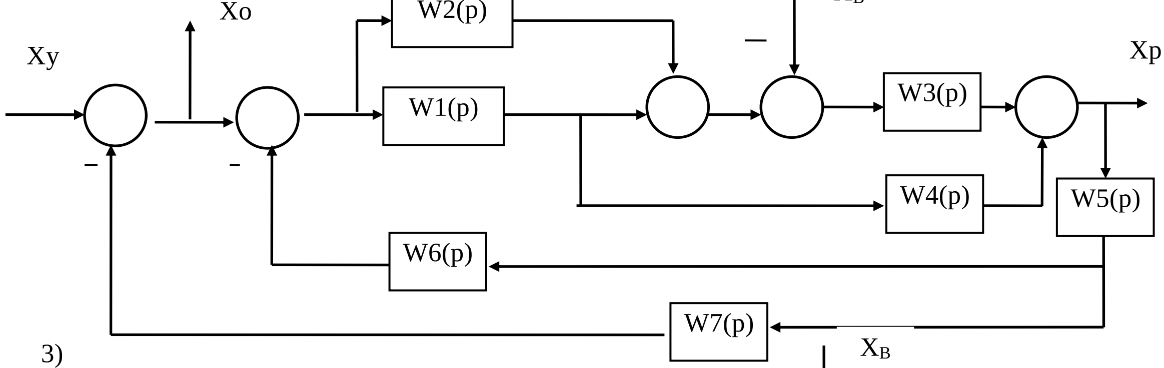
Задание экзаменационного билета № 10 (10 баллов)

Тема 1 Модели описания систем и их преобразование

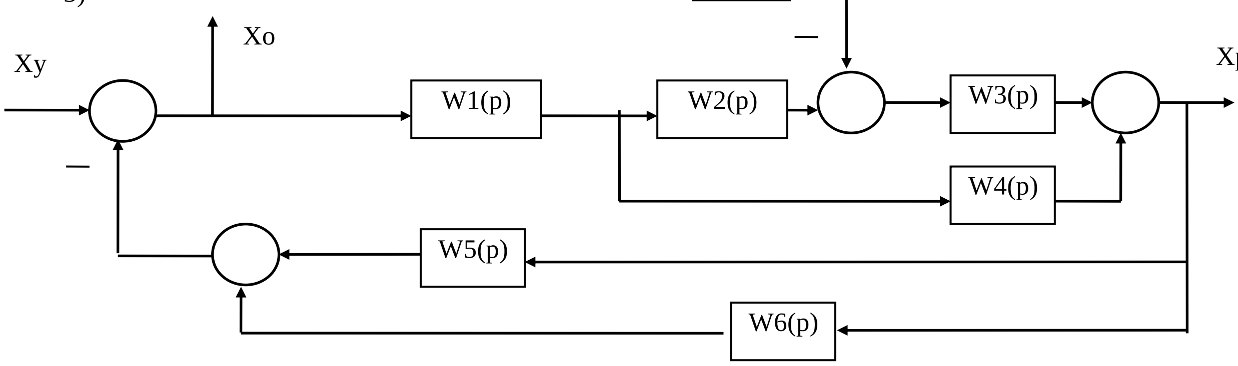
Задание 10.1 (задача)
Используя правила структурных преобразований, найти передаточные функции
$\frac{X_p(p)}{X_y(p)}, \frac{X_p(p)}{X_B(p)}, \frac{X_o(p)}{X_y(p)}, \frac{X_o(p)}{X_B(p)}$.



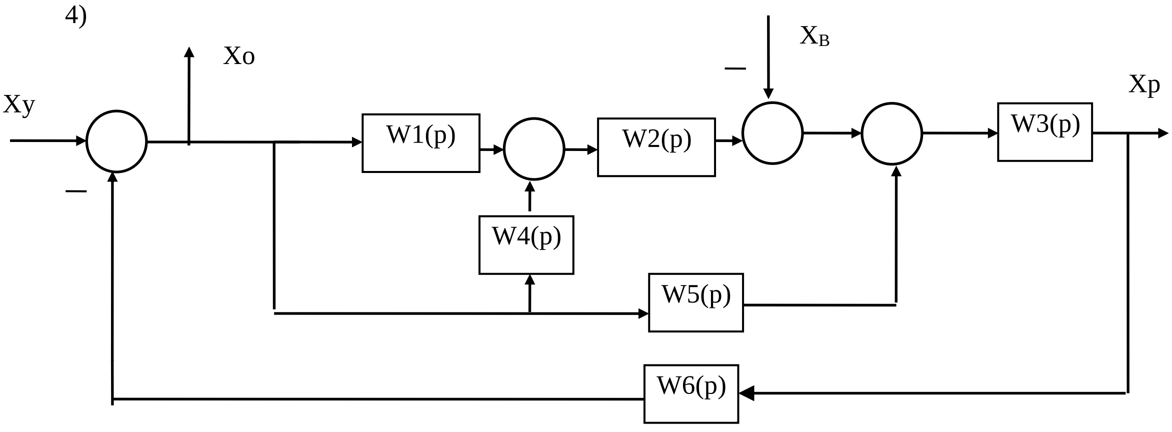
2)


Xo
XB
Xy
Xp
W2(p)
W1(p)
W3(p)
W4(p)
W5(p)
W6(p)
W7(p)

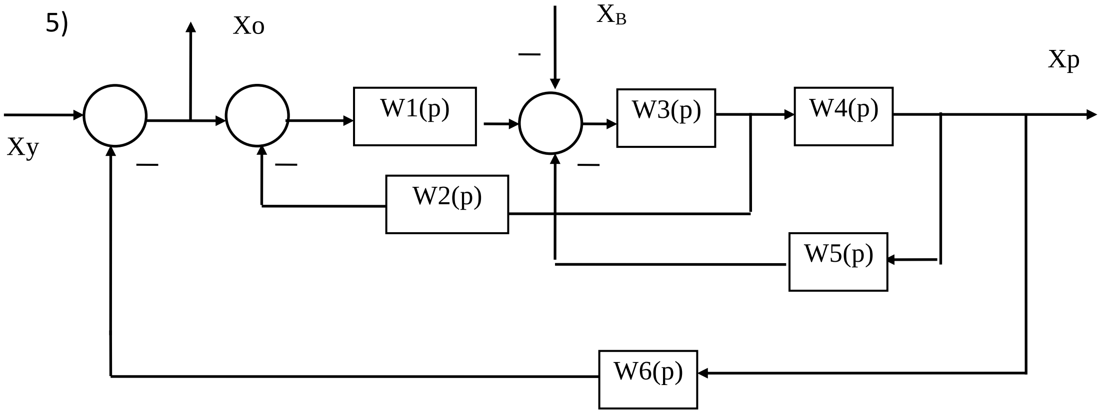
3)


XB
Xo
Xy
Xp
W1(p)
W2(p)
W3(p)
W4(p)
W5(p)
W6(p)

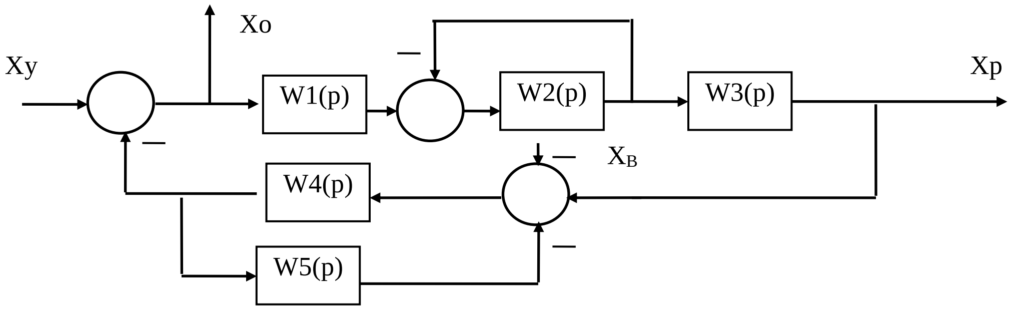
4)


Xo
XB
Xy
Xp
W1(p)
W2(p)
W3(p)
W4(p)
W5(p)
W6(p)

5)


Xo
XB
Xp
Xy
W1(p)
W3(p)
W4(p)
W2(p)
W5(p)
W6(p)

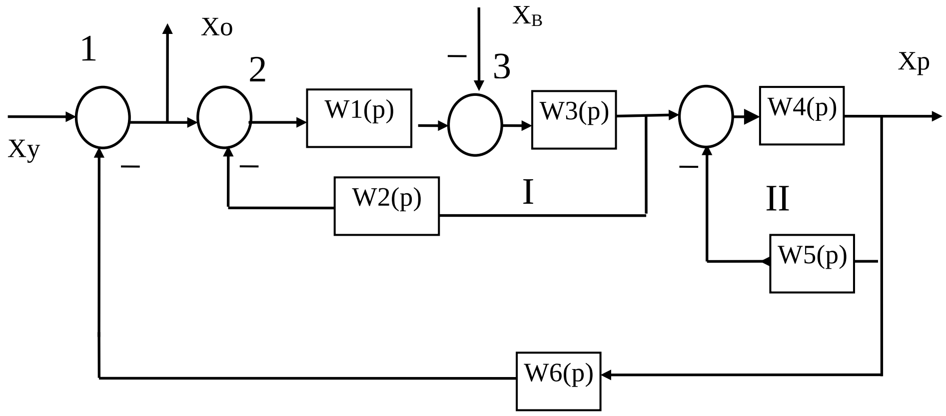
6)


Xo
Xy
Xp
W1(p)
W2(p)
W3(p)
XB
W4(p)
W5(p)

Пример выполнения задания 10.1

Используя правила структурных преобразований, найти передаточные функции

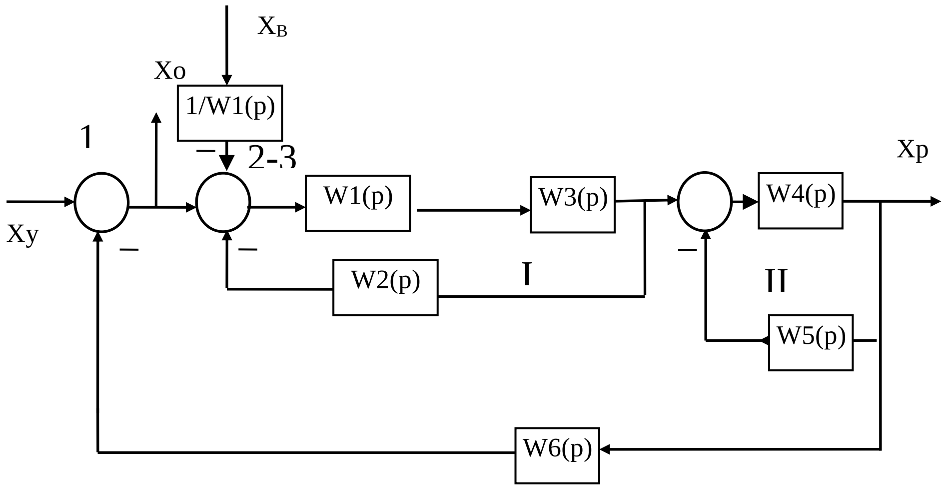
$\frac{X_p(p)}{X_y(p)}, \frac{X_p(p)}{X_B(p)}, \frac{X_o(p)}{X_y(p)}, \frac{X_o(p)}{X_B(p)}$.



Решение:

Обозначим сумматоры, узлы и контуры обратной связи, которые мы будем использовать при структурных преобразованиях, и нанесем их на исходную схему.

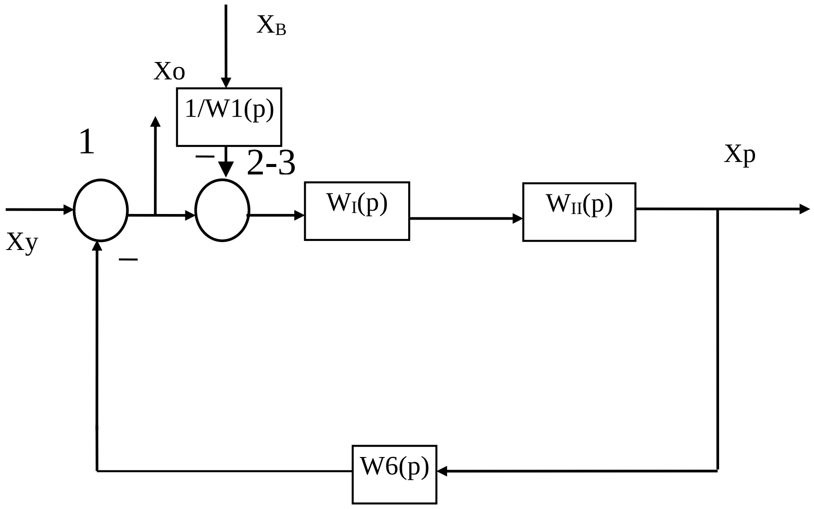
Перенесем динамическое звено W1(p) через сумматор 3 по направлению передачи сигнала. При этом в прямой цепи сигнал не изменится, а сигнал возмущения X_B пройдет дополнительно через последовательно соединенные звенья W1(p) и W3(p). Для того чтобы сигнал не изменился, его надо пропустить через звено с передаточной функцией, обратной, т.е. через 1/ W1(p). Объединив два последовательно стоящие сумматора 2 и 3, получим:



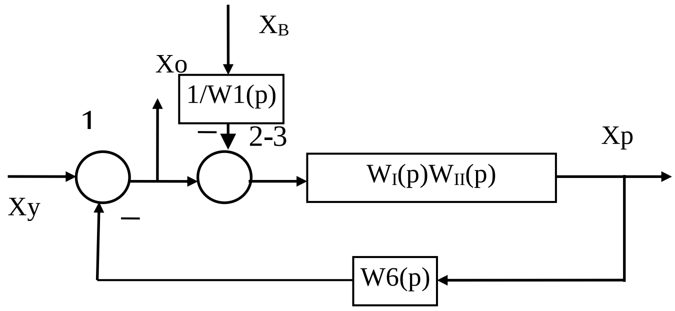
Заменим последовательно стоящие звенья W1(p) и W3(p) эквивалентным звеном W1(p)W3(p), соединение **I** и **II** - эквивалентными звеньями с передаточными функциями:

$$W_I(p) = \frac{W1(p)W3(p)}{1 + W1(p)W2(p)W3(p)} \text{ и } W_{II}(p) = \frac{W4(p)}{1 + W4(p)W5(p)}.$$

Изобразим полученную структурную схему:



Объединив последовательно соединенные звенья $W_I(p)$ и $W_{II}(p)$, получим эквивалентное звено с передаточной функцией $W_I(p)W_{II}(p)$ и изобразим структурную схему в виде:



Для полученной схемы можно записать требуемые передаточные функции:

$$\frac{X_p}{X_y} = \frac{W_I(p)W_{II}(p)}{1+W_I(p)W_{II}(p)W6(p)} = \frac{\dfrac{W1(p)W3(p)}{1+W1(p)W2(p)W3(p)}\cdot\dfrac{W4(p)}{1+W4(p)W5(p)}}{1+\dfrac{W1(p)W3(p)}{1+W1(p)W2(p)W3(p)}\cdot\dfrac{W4(p)}{1+W4(p)W5(p)}\cdot W6(p)} =$$

$$= \frac{W1(p)W3(p)W4(p)}{1+W1(p)W3(p)W4(p)W6(p)}.$$

$$\frac{X_p}{X_B} = \frac{W_I(p)W_{II}(p)}{1+W_I(p)W_{II}(p)W6(p)}\cdot\left(-\frac{1}{W1(p)}\right) = \frac{-W3(p)W4(p)}{1+W1(p)W3(p)W4(p)W6(p)}.$$

$$\frac{X_o}{X_y} = \frac{1}{1+W_I(p)W_{II}(p)W6(p)} =$$

$$= \frac{(1+W1(p)W2(p)W3(p))(1+W4(p)W5(p))}{(1+W1(p)W2(p)W3(p))\cdot(1+W4(p)W5(p))+(W1(p)W3(p)W4(p)W6(p))}.$$

$$\frac{X_o}{X_B} = \frac{W_I(p)W_{II}(p)W6(p)}{1+W_I(p)W_{II}(p)W6(p)}\cdot\frac{1}{W1(p)} = \frac{W3(p)W4(p)W6(p)}{1+W1(p)W3(p)W4(p)W6(p)}.$$

Ответ: После преобразования многоконтурной системы к одноконтурной определены передаточные функции замкнутой системы по управлению и возмущению и передаточные функции ошибок по управлению и возмущению.

Тема 2 Устойчивость линейных и нелинейных непрерывных систем автоматического управления

Задание 10.2 (теоретическое)
Понятие устойчивости системы автоматического управления. Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной непрерывной системы автоматического управления.

Задание 10.3 (теоретическое)
Критерий Найквиста устойчивости линейных непрерывных систем автоматического управления для случаев устойчивой и неустойчивой разомкнутой системы.

Задание 10.4 (теоретическое)
Критерий Найквиста устойчивости линейных непрерывных систем автоматического управления для случая нейтрально-устойчивой разомкнутой системы.

Задание 10.5 (теоретическое)
Критерий В.М. Попова устойчивости нелинейных систем.

Задание экзаменационного билета № 11 (10 баллов)

Тема Дискретные системы автоматического управления

Задание 11.1 (теоретическое)
Спектр сигнала на выходе идеального импульсного элемента в линейной импульсной системе с амплитудно-импульсной модуляцией. Теорема Котельникова.

Задание 11.2 (теоретическое)
Условия, при которых импульсную систему можно исследовать как непрерывную.

Задание 11.3 (задача)
Исследовать на устойчивость линейную импульсную систему автоматического управления с помощью критерия Гурвица, если ее характеристический полином имеет вид:

1) $A^*(p) = 3e^{2pT} - 2e^{pT} + 1,$
2) $A^*(p) = 5e^{2pT} + 2e^{pT} + 1,$
3) $A^*(p) = 2e^{2pT} + e^{pT} - 7,$
4) $A^*(p) = e^{2pT} + 2e^{pT} - 4,$
5) $A^*(p) = e^{2pT} + 5e^{pT} - 3.$

Задание 11.4 (теоретическое)
Оценка устойчивости линейной импульсной системы автоматического управления по критерию Найквиста для случая устойчивой разомкнутой системы.

Задание 11.5 (теоретическое)
Оценка устойчивости линейной импульсной системы автоматического управления по критерию Найквиста для случая неустойчивой разомкнутой системы.

Задание 11.6 (теоретическое)
Оценка устойчивости линейной импульсной системы автоматического управления по критерию Найквиста для случая нейтрально-устойчивой разомкнутой системы.

Пример выполнения задания 11.3
Исследовать на устойчивость линейную импульсную систему автоматического управления с помощью критерия Гурвица, если ее характеристический полином имеет вид:
$A^*(p) = e^{2pT} - 3e^{pT} + 5.$

Решение:

Запишем характеристическое уравнение рассматриваемой импульсной системы автоматического управления (ИСАУ):
$$A^*(p) = e^{2pT} - 3e^{pT} + 5 = 0. \qquad (*)$$

Чтобы применить формулировку критерия Гурвица, используемую для непрерывных систем, необходимо выполнить отображение отрезка $-j\frac{\omega_0}{2} \le \operatorname{Im} p \le j\frac{\omega_0}{2}$ комплексной плоскости P на всю мнимую ось, поскольку критерий Гурвица предполагает, что корни исследуемого характеристического уравнения лежат на всей комплексной плоскости, а у импульсных систем основные корни характеристического уравнения лежат в полосе $-j\frac{\omega_0}{2} \le \operatorname{Im} p \le j\frac{\omega_0}{2}$. Для этого сделаем в уравнении (*) замену переменных $e^{pT} = z$, а затем применим билинейное преобразование:
$$z = \frac{1+V}{1-V}.$$

В результате характеристическое уравнение примет вид:
$$A^*(V) = \left(\frac{1+V}{1-V}\right)^2 - 3\frac{1+V}{1-V} + 5 = 0.$$

(Легко проверить, что при изменении частоты ω от $-\frac{\omega_0}{2}$ до $\frac{\omega_0}{2}$ значение переменной $V = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = j \cdot tg\frac{\omega T}{2}$ меняется от $-j\infty$ до $+j\infty$, т.е. имеем всю мнимую ось на плоскости V.)

После приведения к общему знаменателю будем иметь:
$$A_0V^2 + A_1V + A_2 = 0, \qquad (**)$$
где $A_0 = 9$, $A_1 = -8$, $A_2 = 3$.

Для полученного уравнения (**) уже можно использовать формулировку критерия Гурвица для непрерывных систем:
Для того чтобы ИСАУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $A_0 > 0$ все частные определители Гурвица до n-го порядка включительно были положительны.

Частные определители Гурвица получаются из главного определителя Гурвица, который для системы 2-го порядка имеет вид:
$$\Delta_n = \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Т.о. для устойчивости ИСАУ (необходимое и достаточное условие) должно выполняться: $A_0 > 0$, $\Delta_1 = A_1 > 0$ и $\Delta_2 = A_1A_2 > 0$

(с учетом второго неравенства последнее неравенство эквивалентно условию $A_2 > 0$, т.е. для системы 2-го порядка необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов A_i, $i = \overline{0,2}$).

В рассматриваемом примере $A_1 = -8 < 0$, а значит, ИСАУ неустойчива.
Ответ: ИСАУ неустойчива.

Задание экзаменационного билета № 12 (10 баллов)

Тема 1 Программные средства для решения задач моделирования, исследования и разработки систем управления

Задание 12.1 (теоретическое)
MATLAB: Понятие дополнительных пакетов (Toolboxes). Достоинства и недостатки MATLAB. Возможности применения MATLAB в инженерных расчетах и при исследовании и моделировании систем управления.

Задание 12.2 (теоретическое)
Импортозамещение в области программных средств. Единый реестр российских программ для электронных вычислительных машин и баз данных.

Тема 2 Системы управления базами данных (СУБД)

Задание 12.3 (теоретическое)
Поддержка целостности данных в СУБД. Транзакции в СУБД.

Задание 12.4 (теоретическое)
Архитектура «клиент-сервер» в СУБД, варианты реализации.

Задание 12.5 (теоретическое)
Языковые средства СУБД. Язык SQL.

Задание 12.6 (практическое)
Разработайте алгоритм и напишите программу (на одном из языков: C/C++, Python, Delphi, m (MATLAB), R), выполняющую следующие операции:
1) Ввод данных из файла Dan.txt (в столбец записаны числовые данные, представляющие выработку электроэнергии на ТЭЦ по дням месяца).
2) Расчет по этим данные значения среднедневной выработки электроэнергии.
3) Определение числа дней, в которые выработка электроэнергии превышала это среднее значение.
4) Отображение результатов расчетов.

Задание 12.7 (практическое)
Разработайте алгоритм и напишите программу (на одном из языков: C/C++, Python, Delphi, m (MATLAB), R), выполняющую следующие операции:
- ввод из текстового файла Dan.txt записанных в столбец числовых данных – измерений ежедневно в некотором месяце значений выработки тепловой энергии на одной из ТЭЦ;
- расчет абсолютных изменений выработки тепла в каждый день в сравнении с предыдущим днем;
- определение и отображение результатов для трех дней с наибольшими рассчитанными изменениями (день и значение).

Примеры выполнения задания 12.6

В среде MATLAB

```
ElEn=load('Dan.txt')
N=length(ElEn)
Srd=mean(ElEn)
ElEn(ElEn<Srd)=0
ElEn(ElEn>=Srd)=1
NN=sum(ElEn)
fprintf('Число дней с выработкой больше средней = %d\n',NN)
```

В среде Python

```
ff=open('Dan.txt','rt')
dan=[]
for strk in ff:
   dan.append(float(strk.rstrip('\n')))

ff.close()
N=len(dan)
Srd=sum(dan)/N
NN=0
for r in dan:
   if r>Srd:NN+=1
print('Число дней с повышенной выработкой=',NN)
```

В среде R

```
dan=scan('Dan.txt')
N=length(dan)
Srd=mean(dan)
NN=0
for (r in dan) if (r>Srd)NN=NN+1
cat('Число превышений=',NN,'\n')
```

Примеры выполнения задания 12.7

В среде MATLAB

```
Teplo=load('Dan.txt')
N=length(Teplo)
Izmen=abs(Teplo(2:end)-Teplo(1:end-1))
Res=sortrows([(2:N)' Izmen],2)
fprintf('День = %d  изменение = %f\n',Res(end-2:end,:)')
```

В среде Python

```
ff=open('Dan.txt','rt')
dan=[]
for strk in ff:
   dan.append(float(strk.rstrip('\n')))

ff.close()
N=len(dan)
Izmen=[]
for i in range(1,N):
   Izmen.append(abs(dan[i]-dan[i-1]))
```

```
dni=[]
Izmen1=Izmen
for i in range(3):
    r=max(Izmen1)
    m=Izmen1.index(r)
    dni.append(m)
    Izmen1[m]=0
    print('день='+str(m)+' Изменение = '+str(r)+'\n')
```

В среде R

```
dan=scan('Dan.txt')
N=length(dan)
Izmen=dan[2:N]-dan[1:N-1]
Mas=array(c(2:N,Izmen),c(N-1,2))
Mas1=Mas[order(Mas[,2]),]
print(Mas1[(N-3):(N-1),])
```

Задание экзаменационного билета № 13 (10 баллов)

Тема 1 Программные средства для решения задач моделирования, исследования и разработки систем управления

Задание 12.1 (теоретическое)
MATLAB: Понятие дополнительных пакетов (Toolboxes). Достоинства и недостатки

Тема 1 Статистический анализ данных

Задание 13.1 (теоретическое)
Предварительный анализ выборки. Диаграмма Тьюки («ящик с усами», Box-Whisker Plot).

Задание 13.2 (теоретическое)
Понятие корреляции. Парный, частный и множественный коэффициенты корреляции.

Задание 13.3 (теоретическое)
Понятие регрессионного анализа (РА). Предположения РА.

Задание 13.4 (теоретическое)
Расчет оценок общей, регрессионной и остаточной дисперсий в регрессионном анализе.

Задание 13.5 (теоретическое)
Расчет коэффициента детерминации и скорректированного коэффициента детерминации для определения адекватности регрессионной модели.

Задание 13.6 (теоретическое)
Свойства точечных оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность).

Задание 13.7 (задача)
Ковариационная матрица оценок парной регрессии $y = 0{,}451 + 0{,}577x^{(1)}$ имеет вид:

$$K = \begin{bmatrix} 3.449 & -0.468 \\ -0.468 & 0.065 \end{bmatrix}.$$

Построить доверительные интервалы для коэффициентов b_0 и b_1 для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, если размер выборки N=5.

Задание 13.8 (задача)

Определить оценки параметров линейной регрессии ($y = b_0 + b_1 x_1$) по имеющимся входным-выходным наблюдениям, приведенным в таблице.

Таблица

x	72	75	79	81	83
y	18	20	21	24	25

Пример выполнения задания 13.7

Доверительные интервалы вычисляются по формулам:

$$\hat{b} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_i} \le b_i \le \hat{b} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_i}$$

Из таблицы t-распределения для $N=5$, $k=2$, $\alpha = 0{,}05$ находим:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-2) = t_{0,975}(3) = 3{,}182.$$

Учитывая, что на главной диагонали ковариационной матрицы находятся дисперсии оценок, получаем:

$$S_{\hat{b}_0} = \sqrt{3{,}449} = 1{,}856;$$

$$S_{\hat{b}_1} = \sqrt{0{,}065} = 0{,}255.$$

Проведем промежуточные расчеты:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_0} = 3{,}182 \cdot 1{,}856 = 5{,}909;$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)S_{\hat{b}_1} = 3{,}182 \cdot 0{,}255 = 0{,}811.$$

Ответ:

доверительный интервал для b_0: $0{,}451 \pm 5{,}909$;

доверительный интервал для b_1: $0{,}577 \pm 0{,}811$.

Пример выполнения задания 13.8

Воспользуемся формулами для расчета оценок коэффициентов регрессии:

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j - \frac{\hat{b}_1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x};$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j y_j - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j \sum_{j=1}^{N} x_j}{\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2}.$$

Найдем средние значения: $\bar{y} = 21{,}6$ и $\bar{x} = 78$.

Подставим значения x и y из таблицы в формулу для расчета $\hat{b}_1$:

$$\hat{b}_1 = \frac{(72 * 18 + 75 * 20 + 79 * 21 + 81 * 24 + 83 * 25) - \frac{1}{5}(108 * 390)}{(5184 + 5625 + 6241 + 6561 + 6889) - \frac{1}{5}(390)^2} =$$

$$\frac{8474 - 8424}{30500 - 30420} = \frac{50}{80} = 0{,}625$$

По рассчитанным значениям $\hat{b}_1$, $\bar{y}$, и $\bar{x}$ определим $\hat{b}_0$.

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x} = 21{,}6 - 0{,}625 * 78 = -27{,}15.$$

Ответ: $y = -27{,}15 + 0{,}625x$.