

БАНК ЗАДАЧ
для вступительных испытаний в магистратуру
(базовая часть)

Задания билета	1,2,3	4	5
Разделы	1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 14	2, 3, 8, 9, 12, 13, 15, 19	16, 17, 18, 20
Количество баллов	5 б.	10 б.	15 б.

Содержание

Раздел 1. Производная, частная производная, дифференциал.

Раздел 2. Исследование функции.

Раздел 3. Матрица и определители.

Раздел 4. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

Раздел 5. Прямая и плоскость в пространстве.

Раздел 6. Кривые второго порядка.

Раздел 7. Неопределенный интеграл.

Раздел 8. Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

Раздел 9. Определенный интеграл. Замена переменных.

Раздел 10. Вычисление площадей плоских фигур.

Раздел 11. Числовые ряды.

Раздел 12. Дифференциальные уравнения.

Раздел 13. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Раздел 14. Комплексные числа.

Раздел 15. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.

Раздел 16. Изолированные особые точки и их классификация.

Раздел 17. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Раздел 18. Функция-оригинал и ее изображение по Лапласу.

Раздел 19. Восстановление оригинала по изображению.

Раздел 20. Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Решения

Справочные материалы

Раздел 1. Производная, частная производная, дифференциал.

Таблица производных

1. $c' = 0, c = \text{const}$	12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	14. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
4. $(e^x)' = e^x$	15. $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	16. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	17. $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$
7. $(\sin x)' = \cos x$	18. $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$
8. $(\cos x)' = -\sin x$	19. $(\text{th } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$
9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
10. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
11. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	

Найти $f'(x)$, если:

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = 3^{\log_5(x+1)}$; | 2) $f(x) = \frac{1}{\arcsin \sqrt{x}}$; |
| 3) $f(x) = \sqrt[3]{2 - \text{tg}^3 x}$; | 4) $f(x) = \sin^2(x^3 + 5x)$; |
| 5) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln^2 x}}$; | 6) $f(x) = \log_3(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$; |
| 7) $f(x) = \frac{3 \text{tg}^4 \sqrt{x} + 2}{4 \text{tg}^4 \sqrt{x} - 1}$; | 8) $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| 9) $f(x) = \frac{1}{(\text{arctg} \frac{1}{x})^2}$; | 10) $f(x) = \ln(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^{2\sqrt{x}} + 1})$; |
| 11) $f(x) = \sin^3(\sqrt{x} + 2)$; | 12) $f(x) = \sqrt[3]{2 - \arcsin x^2}$; |
| 13) $f(x) = \frac{1}{\text{th}^3(\sqrt{x})}$; | 14) $f(x) = (\text{sh } x)^{\text{th} x}$; |
| 15) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{2x+1}}{(x+2)^2}$; | 16) $f(x) = (x+1)^3 e^{\frac{x}{x+1}}$; |
| 17) $f(x) = \frac{1}{\log_5(\arcsin \sqrt{x})}$; | 18) $f(x) = \frac{x e^{\sqrt{x}} + 1}{2x e^{\sqrt{x}} + 3}$; |
| 19) $f(x) = \text{ch}^2(\text{sh} \sqrt{x})$; | 20) $f(x) = \text{sh}^3(xe^x + 1)$. |
| 21) $f(x) = \frac{2}{x-1} + \sin x^2$. | 22) $f(x) = (x+1) \cos^2 x$. |
| 23) $f(x) = (2x-1) \ln(x+1)$. | 24) $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - 3 \sin \frac{x}{3}$. |
| 25) $f(x) = (\sqrt[4]{x^4+1} + 5)(x^3-1)$. | 26) $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. |
| 27) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x-1)}$. | |

2) Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

3) Решить матричное уравнение (с неизвестной матрицей X):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5) Приведя матрицу к ступенчатому виду, найти ее определитель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

6) Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

7) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A^3 - 3A^2 + 3A$.

8) Приведя матрицу A к ступенчатому виду, определить ее ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

9) Найти определитель $\det(A^{-1})$ матрицы, обратной матрице A , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

10) Найти $\det(AB)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Имеет ли матрица AB обратную?

12) Найти собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Раздел 4. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

Решить систему линейных уравнений, сделать проверку:

$$1) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 16, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 9; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 9; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -16; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -7, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

Раздел 5. Прямая и плоскость в пространстве.

- 1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 1; 0)$ и параллельной плоскости $3x - 4y + z = 1$.
- 2) Написать уравнение плоскости, содержащей точку $A(1; 1; 1)$ и ось Ox .
- 3) Найти угол между плоскостями π_1 и π_2 , где $\pi_1: 2x - y + z = 0$, $\pi_2: x + y - z = 1$.
- 4) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$ и $B(0; -1; 3)$.

$$5) \text{ Найти угол между прямой } l \text{ и плоскостью } \pi, \text{ где } l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -t, \\ z = 2 + t, \end{cases}$$

$$\pi: x + y + z = 3.$$

- 6) Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 0; 2)$ и перпендикулярной плоскости $\pi: x - y + z = 1$.
- 7) Написать каноническое уравнение прямой l , которая является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2 , где $\pi_1: 2x - y + z = 0$, $\pi_2: x + y - z = 1$.

$$8) \text{ Найти угол между прямыми } l_1 \text{ и } l_2, \text{ где } l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z, l_2: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

Найти точку M , симметричную точки N относительно данной плоскости:

$$9) M(-1, 0, -1), \quad 4x + 6y + 4z - 25 = 0;$$

$$10) M(1, 0, 1), \quad 2x + 6y - 2z + 11 = 0.$$

- 11) Лежат ли точки $A_1(1; 0; 2)$, $A_2(2; -1; 0)$, $A_3(0; 0; 0)$, $A_4(1; -1; 1)$ в одной плоскости?

Найти косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} :

$$12) A(1, -2, 3), \quad B(0, -1, 2), \quad C(3, -4, 5);$$

$$13) A(0, -3, 6), \quad B(-12, -3, -3), \quad C(-9, -3, -6);$$

- 14) $A(3, 3, -1), B(5, 5, -2), C(4, 1, 1)$;
 15) $A(-1, 2, -3), B(3, 4, -6), C(1, 1, -1)$;
 16) $A(-4, -2, 0), B(-1, -2, 4), C(3, -2, 4)$

Раздел 6. Кривые второго порядка.

Определить вид кривой и сделать ее эскиз:

- 1) $(x + 5)^2 + y^2 = 3$; 2) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$;
 3) $(x - 5)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; 4) $y^2 = 2x + 2$;
 5) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$;

- 6) Написать (в декартовой системе координат) уравнение окружности с центром в точке $A(2; -4)$, проходящей через точку $B(-1; 0)$.

Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с данной прямой. Построить кривую и прямую на плоскости:

- 7) $2x^2 + y^2 - 12x + 10 = 0, x + y - 2 = 0$;
 8) $y^2 + x + 4y + 3 = 0, x + 2y + 2 = 0$.

Раздел 7. Неопределенный интеграл.

Таблица интегралов

- | | |
|---|--|
| 1. $\int 0 \cdot dx = C$ | 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$ | 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ |
| 3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
$n \neq -1, x > 0$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x < a $ |
| 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | 12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | 13. «Высокий» логарифм:
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C, x \neq a$ |
| 6. $\int e^x dx = e^x + C$ | 14. «Длинный» логарифм:
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$ |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | |
| 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | |

- 1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;
- 2) $\int \frac{8^x \cdot 10^{2x}}{e^{3x}} dx$;
- 3) $\int x^2 \sin x^3 dx$;
- 4) $\int x^2 e^{2x^3} dx$;
- 5) $\int \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3 \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}$;
- 6) $\int \frac{x^3 dx}{x^2-4}$;
- 7) $\int \ln x dx$;
- 8) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$;
- 9) $\int \operatorname{arctg} x dx$;
- 10) $\int \frac{xdx}{x^2+4}$;
- 11) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5+5}}{x^2} dx$
- 12) $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2+1}}{x^2} dx$
- 13) $\int \sqrt{5-4x} dx$
- 14) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$
- 15) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
- 16) $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$
- 17) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$
- 18) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}$

Раздел 8. Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

- 1) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$;
- 2) $\int \frac{dx}{x^3+x}$;
- 3) $\int \frac{(x+3)dx}{x(x+1)(x+2)}$;
- 4) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;
- 5) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+2x-3)(x+1)}$;
- 6) $\int \sin^2 x \cos x dx$;
- 7) $\int \sin^2 x dx$;
- 8) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;
- 9) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;
- 10) $\int \frac{dx}{\sin x+2 \cos x}$;
- 11) $\int \frac{(\cos x-3 \sin x)dx}{\sin x+3 \cos x}$.

Раздел 9. Определенный интеграл. Замена переменных.

- 1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$;
- 2) $\int_0^1 (2x+1)e^{x+2} dx$;
- 3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{x+2}}$;
- 4) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3 x}$;
- 5) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x+3 \ln x}{x} dx$;
- 6) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx$;
- 7) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} dx$;
- 8) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$;
- 9) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+3}}$;
- 10) $\int_0^1 e^{(x+e^x)} dx$.
- 11) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$.
- 12) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$.
- 13) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.
- 14) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.
- 15) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$.
- 16) $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$.
- 17) $\int_0^1 3(x^2+x^2 e^{x^3}) dx$
- 18) $\int_3^8 \sqrt{x+1} dx$.

$$19) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx.$$

$$20) \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x}{\cos^2 x^2} dx.$$

Раздел 10. Вычисление площадей плоских фигур.

- 1) Область ограничена кривыми: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3$. Найти ее площадь.
- 2) Область ограничена кривыми: $y = 4 - x^2$, $y = x^2$. Найти ее площадь.
- 3) Область ограничена кривыми: $y = x^2$, $x + y = 4$, $y = 0$. Найти ее площадь.
- 4) Область ограничена кривыми: $y^2 = x$, $x^2 = y$. Найти ее площадь.
- 5) Найти площадь фигуры, если ее границей является кривая

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$
- 6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 3 \cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$
- 7) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$
- 8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\rho = \cos \varphi$.
- 9) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как

$$\begin{cases} \rho = \varphi \\ \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$
- 10) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.
- 11) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$.

Раздел 11. Числовые ряды.

Исследовать ряд на сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+3)!};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)!};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^2+n+7};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2};$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}.$$

Раздел 12. Дифференциальные уравнения.

- 1) Решить уравнение $y' = xy + x$.
- 2) Решить уравнение $(x + 1)^2 y' = y$.
- 3) Решить задачу Коши: $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.
- 4) Найти общий интеграл уравнения $(x + y)y' = x - y + \frac{xy+y^2}{x}$.
- 5) Решить задачу Коши: $y' = 2y + 2$, $y(0) = 0$.
- 6) Решить задачу Коши: $2yy' = y^2 + 1$, $y(\ln 2) = 1$.
- 7) Найти общее решение уравнения $xy' + y = xy + 1$.
- 8) Решить задачу Коши: $y' = y - x + 1$, $y(0) = 1$.
- 9) Найти общее решение уравнения $y' \operatorname{tg} x = y$.
- 7) Найти общее решение уравнения $\frac{y'}{y} = \ln y - x + 1$.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

- 8) $e^{x+3y} dy = x dx$.
- 9) $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$.
- 10) $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$.
- 11) $(x^2 + x)y dx + (y^2 + 1)dy = 0$.
- 12) $y' \sqrt{1 + y^2} = \frac{x^2}{y}$.
- 13) $(xy - x)^2 dy = y(x - 1)dx$.

Решить задачу Коши:

- 14) $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$.
- 15) $y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$.
- 16) $y'' = \sin^2 3x$, $y(0) = -\pi^2/16$, $y'(0) = 0$.
- 17) $y''' = \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 15/16$, $y''(0) = 0$.

Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению:

- 18) $y = xe^{-x^2/2}$, $xy' = (1 - x^2)y$;
- 19) $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$;
- 20) $y = 5e^{-2x} + \frac{e^x}{3}$, $y' + 2y = e^x$;
- 21) $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $yy' = x - 2x^3$;
- 22) $y = -\frac{1}{3x+c}$, $y' = 3y^2$.

Раздел 13. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

- 1) Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.
- 2) Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y' = 0$.
- 3) Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + 17y' = 0$.
- 4) Решить задачу Коши: $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
- 5) Решить задачу Коши: $y'' - 4y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
- 6) Найти общее решение уравнения $y''' - 9y' = x$.
- 7) Найти общее решение уравнения $y''' + y' = 1$.

- 8) Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.
- 9) Найти общее решение уравнения $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.
- 10) Решить задачу Коши: $y''' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.
Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.
- 11) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$;
- 12) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$, $y(0) = -2,5$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$;
- 13) $y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = -18$;
- 14) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 133$, $y(0) = 0$.

Раздел 14. Комплексные числа.

- 1) Записать в алгебраической форме число $I = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$.
- 2) Записать в алгебраической форме число $I = (1 - \sqrt{3}i)^{2018}$.
- 3) Для числа $z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ найти $|z|^{2018}$ и $\operatorname{Arg}(z^{2018})$.
- 4) Записать в алгебраической форме число $I = \frac{\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18}}$.
- 5) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенствами: $\begin{cases} |z - 1| \leq 1, \\ 0 \leq \operatorname{arg} z \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
- 6) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенством $|z| \geq |z + 1|$.
- 7) Решить уравнение $\frac{2+3i}{(2-i)}z - i = 0$. Ответ записать в алгебраической форме.
- 8) Решить уравнение $(2 + i)z - (1 + i)\bar{z} = i$. Ответ записать в алгебраической форме.
- 9) Найти все решения уравнения $z^3 - 2z^2 + 5z = 0$, лежащие в области $\begin{cases} |z| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 1. \end{cases}$
- 10) Найти все решения уравнения $z^2 + 2z + 10 = 0$, лежащие в области $\operatorname{Im}(\bar{z}) \geq \operatorname{Re} z$.

Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами.

- 11) $|z - 1| \leq 1$, $|z + 1| > 2$. 12) $|z + i| \leq 2$, $|z - i| > 2$.
- 13) $|z + i| < 2$, $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

Представить в алгебраической форме.

- 14) $\frac{(2+i)i^3}{\sqrt{3}-i}$. 15) $\frac{3-i}{(i+1)i^5}$.
- 16) $\frac{(3i-1)(2+i)}{i^{10}}$. 17) $(i - \sqrt{3})^3$.
- 18) $\frac{2+i}{1-i}$. 19) $(-i)^i$.
- 20) $(1 + i)^i$.

Раздел 15. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.

- 1) Решить уравнение $z^3 = -i$. Ответы записать в алгебраической форме.
- 2) Найти все значения $\sqrt[4]{i^4}$. Ответы записать в алгебраической форме.
- 3) Решить уравнение $\cos z = 2$. Ответы записать в алгебраической форме.
- 4) Записать в алгебраической форме i^i .
- 5) Найти $\operatorname{Re}(e^{iz^2})$.
- 6) Может ли функция $u = x^2 + y^2 - xy$ быть действительной частью некоторой аналитической в \mathbb{C} функции?
- 7) Найти аналитическую в \mathbb{C} функцию $f(z)$, такую, что $\operatorname{Im} f = x^2 - y^2 + y$, $f(0) = 0$.
- 8) Записать в алгебраической форме $\sin(1 + i)$.
- 9) Решить уравнение $e^z = e^{2018\pi i}$.

Раздел 16. Изолированные особые точки и их классификация.

Определить особые точки и их типы для функции и вычислить вычеты в этих точках:

- | | |
|---|---|
| 1) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$; | 2) $f(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}$; |
| 3) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos z}$; | 4) $f(z) = \frac{e^{1/z} + 1}{e^{1/z} - 1}$; |
| 5) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$; | 6) $f(z) = \frac{z(\operatorname{sh} z - z)}{(1 - \cos z)^2}$; |
| 7) $f(z) = e^z e^{\frac{1}{z-2}}$; | 8) $f(z) = \frac{1}{(\sin z - \frac{1}{2})^2}$; |
| 9) $f(z) = \frac{1}{\sin(z-1)} e^{\frac{1}{z}}$; | 10) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$. |

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции.

- | | |
|---|--|
| 11) $\frac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}$ | 12) $z^3 e^{7/z^2}$ |
| 13) $\frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$ | 14) $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$ |
| 15) $\frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$ | 16) $\frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$ |
| 17) $z \sin \frac{6}{z^2}$ | 18) $\frac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$ |
| 19) $\frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$ | 20) $\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$ |

Раздел 17. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Вычислить:

$$1) \int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz;$$

$$3) \int_{|z-2|=5} \frac{\sin z - z}{z^4} dz;$$

$$5) \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z \cos z} dz;$$

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx;$$

$$9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)};$$

$$2) \int_{|z-1|=3} \frac{dz}{\sin z};$$

$$4) \int_{|z|=1} z^3 e^{1/z} dz;$$

$$6) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2};$$

$$8) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + 2};$$

$$10) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} dx.$$

Вычислить интеграл.

$$11) \int_{|z|=1} \frac{\cos 2z - 1}{z^2} dz.$$

$$13) \int_{|z|=1} \frac{\sin z^2 - z^2}{z^5} dz.$$

$$15) \int_{|z|=1} z^3 \cos \frac{1}{z^2} dz.$$

$$17) \int_{|z|=1} \frac{1 - \cos z}{z^3} dz$$

$$19) \int_{|z|=1} z^5 \cos \frac{1}{z^3} dz.$$

$$12) \int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{z^3} dz.$$

$$14) \int_{|z|=1} z e^{2/z} dz.$$

$$16) \int_{|z|=1} \frac{1+z-e^z}{2z^3} dz.$$

$$18) \int_{|z|=1} \frac{\sin^2 z - \frac{1}{z}}{z} dz.$$

$$20) \int_{|z|=1} \frac{\sin 3z}{z-\pi} dz.$$

Раздел 18. Функция-оригинал и ее изображение по Лапласу.

Таблица изображений и оригиналов

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$
$t e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\text{arcctg } p$
$t^n e^{\lambda t}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}(1 - e^{-t})$	$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\delta(t-a), a > 0$	e^{-ap}
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		

- 1) Найти изображение функции $f(t) = t^2 e^{-3t}$.
- 2) Найти изображение функции $f(t) = t e^{-3t} \sin 2t$.
- 3) Найти изображение функции $f(t) = t \operatorname{ch} 2t - \operatorname{sh} t$.
- 4) Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t e^{-x} \cos(t-x) dx$.
- 5) Пусть $f(t) = e^{-2t} \sin 3t$. Найти изображение функции $f''(t)$.
- 6) Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t x^3 e^{-3x} dx$.
- 7) Пусть $f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$ Найти изображение $f(t)$.
- 8) Пусть $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in [0; 1], \\ 1, & t \in [1; 2], \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ Найти изображение $f(t)$.
- 9) Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Найти изображение функции $f(t) = (t - 1)e^{(t-1)}\eta(t-1)$.
- 10) Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Найти изображение $f(t) = \sin 2(t - 2)e^{-2}\eta(t-2)$.
- 11) Найти изображение функции $f(t) = t \sin^2 2t$.

Раздел 19. Восстановление оригинала по изображению.

Найти (непрерывную на $[0; +\infty)$) функцию-оригинал, если ее изображение $F(p)$ равно:

- 1) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+2)}$;
- 2) $F(p) = \frac{p-3}{p^2-6p+10}$;
- 3) $F(p) = \left(\frac{p-2}{p^2-4p+5}\right)''$;
- 4) $F(p) = \left(\frac{p}{p^2+9}\right)''$;
- 5) $F(p) = \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2+4}$;
- 6) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p+1}$;
- 7) $F(p) = (e^{-2p} + 3e^{-p})\frac{1}{p}$;
- 8) $F(p) = \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q(q^2+1)}$;
- 9) $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}}$;
- 10) $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)^{k+1}}$;

Раздел 20. Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Решить операционным методом задачу Коши:

- 1) $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$
- 2) $x' - x = 1, \quad x(0) = -1.$
- 3) $x'' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
- 4) $x'' - 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
- 5) $x' + 2x = 2, \quad x(0) = 1.$

$$6) x' + 3x = e^{-3t}, \quad x(0) = 0.$$

$$7) x'' + x = 2t + 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

$$8) x'' + x' = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

$$9) x'' + x = 2e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$10) x'' + x = 2 \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Операционным методом найти решение системы уравнений

$$11) \begin{cases} x' - y = 0 \\ y' - x = -1, \end{cases} \text{удовлетворяющее начальным условиям } x(0) = 2, \\ y(0) = 1$$

$$12) \begin{cases} x' - 2y = 2t \\ y' = \frac{1}{2}x - 1, \end{cases} \text{удовлетворяющее начальным условиям } x(0) = 2, \\ y(0) = 1$$

$$13) \begin{cases} x' - 2y = 0 \\ y' + x = 3e^{2t} + 1, \end{cases} \text{удовлетворяющее начальным условиям } x(0) = 2, \\ y(0) = 1.$$

Решения

§1.

$$3) f'(x) = \frac{1}{3}(2 - \operatorname{tg}^3 x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3 \operatorname{tg}^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt[3]{(2 - \operatorname{tg}^3 x)^2} \cos^2 x}.$$

§2.

$$1) y = \frac{x^3 - 1}{x}.$$

1. ОДЗ: $x \neq 0$.

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 - \text{вертикальная асимптота.}$$

3. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, периода нет, т.е. функция общего вида.

4. $y = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; точка $(1; 0)$ – точка пересечения с осью Ox .

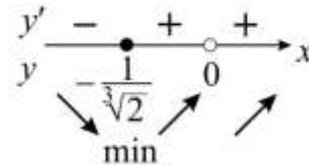
5. Найдем наклонные (горизонтальные) асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = +\infty, \text{ т.е. наклонных и горизонтальных асимптот нет.}$$

$$6. y' = \left(\frac{x^3 - 1}{x} \right)' = \frac{3x^2x - (x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$$y' \neq 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

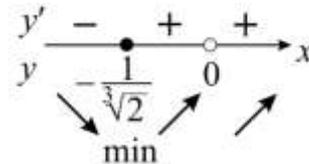


$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \text{ т.е. } \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right) - \text{точка минимума.}$$

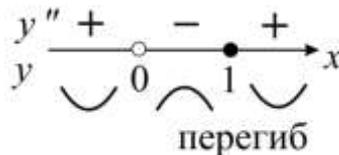
$$7. y'' = \left(\frac{2x^3 + 1}{x^2} \right)' = \frac{6x^2x^2 - (2x^3 + 1)2x}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

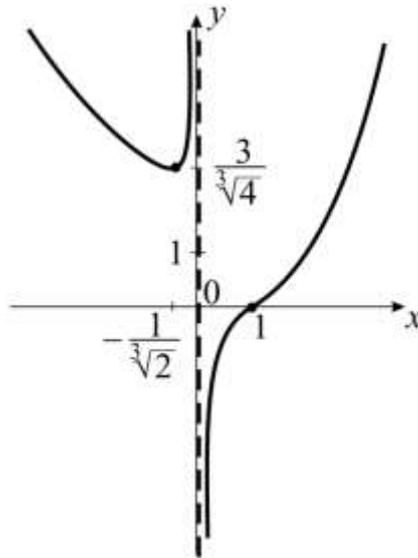
$$y'' \neq 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$



$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \text{ т.е. } \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right) - \text{точка минимума.}$$



$y(1) = 0$, т.е. точка $(1; 0)$ – точка перегиба.



§3.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1. |A| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists! A^{-1}.$$

$$A_{11} = 1 \quad A_{21} = 0 \quad A_{31} = -1$$

$$2. A_{12} = 0 \quad A_{22} = 1 \quad A_{32} = -1$$

$$A_{13} = 0 \quad A_{23} = 0 \quad A_{33} = 1$$

$$3. \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Проверка: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (?)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}A = E.$$

§4.

$$1) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 16, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

$$A|B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \langle \cdot 1/2 \rangle \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \langle \downarrow + \rangle \sim$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \langle \cdot -1 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \langle \cdot 2 \uparrow \rangle$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$Rg A = Rg A|B = 2$; $dim L = 2 \Rightarrow \Phi CP: \vec{e}_1, \vec{e}_2$.

2 баз. переменные: x_1, x_2 , 2 своб. переменные: x_3, x_4 .

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 2x_3 - 3x_4, \\ x_2 = 3 - x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

$$\vec{x}_{\text{о.н.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 - 2x_3 - 3x_4 \\ 3 - x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{\text{ч.н.}}} + C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}.$$

Проверки: $\vec{x}_{\text{ч.н.}}$: $-2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 16$;

\vec{e}_1 : $-2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0$;

\vec{e}_2 : $-2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$.

§5.

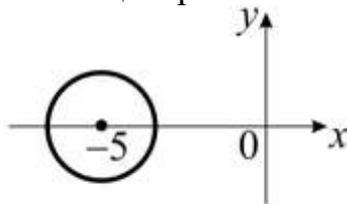
1) $A(1; 1; 0)$, $\alpha: 3x - 4y + z = 1$, $A \in \beta$ и $\alpha \parallel \beta$. Так как $\alpha \parallel \beta$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 = \{3; -4; 1\}$ – нормальный вектор плоскости α , который можно взять за нормальный вектор к плоскости β , точка $A \in \beta$, тогда уравнение плоскости β :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е. $3(x - 1) - 4(y - 1) + 1(z - 0) = 0$, $\beta: 3x - 4y + z + 1 = 0$.

§6.

1) $(x + 5)^2 + y^2 = 3$ – окружность с центром в точке $(-5; 0)$ и радиусом $\sqrt{3}$.



§7.

7) $\int \ln x \, dx = ?$

Интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= uv - \int v \, du = \left\langle \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\rangle = x \ln x - \int dx \\ &= x(\ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

§8.

6) $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (метод подведения под знак дифференциала).

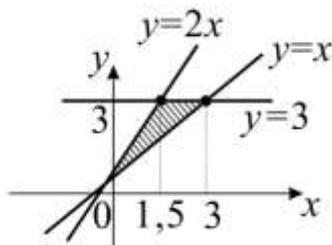
§9.

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

$$4) \int_2^e \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_2^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = -\frac{1}{2 \ln^2 x} \Big|_2^e = -\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{2 \ln^2 e} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ln^2 2} \right).$$

§10.

1) $y = x$; $y = 2x$; $y = 3$.



$$S_{\text{фигуры}} = \int_0^{3/2} (2x - x) dx + \int_{3/2}^3 (3 - x) dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} \Big|_0^{3/2} + \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{3/2}^3 =$$

$$= \frac{9}{8} + 9 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

§11.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$.

1. Проверить необходимое условие сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+4} = 0$.

2. По второй теореме сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится; так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+4} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. исходный ряд расходится.

§12.

1) $y' = xy + x$,

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \quad | : y+1 \neq 0,$$

$$\frac{dy}{y+1} = x dx,$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = x dx; \ln |y+1| = \frac{x^2}{2} + C; y+1 = e^{x^2/2} C; y = e^{x^2/2} C - 1; \text{ так как при}$$

$$C = 0 \quad y = -1, \text{ то ответ: } y = e^{x^2/2} C - 1.$$

§13.

1) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0, \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2 - \text{ все корни кратности 1.}$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} \quad \text{o.o.}$$

§14.

$$4) 5б: \frac{\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{9}}}{e^{i\frac{5\pi}{18}}} = e^{i(\frac{\pi}{9} - \frac{5\pi}{18})} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

§15.

$$z^3 = -i \Rightarrow z = |z|e^{i\varphi}; -i = e^{i\frac{3\pi}{2}};$$

$$|z|^3 e^{i3\varphi} = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1, \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$k = 0 \quad z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i;$$

$$k = 1 \quad z = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$$

$$k = 2 \quad z = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3})} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

§16.

$$\frac{z}{\sin z}.$$

$z = 0$ – устранимая точка, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$; $z = k\pi$ при $k = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ – полюса 1-го порядка, так как $\frac{1}{f} = \frac{\sin z}{z}$ имеет в этих точках нуль первого порядка ($\sin k\pi = 0, \cos k\pi \neq 0$).

§17.

$\int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz = 0$, так как разложение в ряд Лорана этой функции имеет вид: $z^3 \sin \frac{1}{z} = z^3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} + \dots \right) = z^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5!} z^2 + \dots$, т.е. коэффициент при степени $\frac{1}{z}$ равен 0.

§18.

1) 5б: так как $e^{-3t} \doteq \frac{1}{p+3}$, а домножение оригинала на $(-t)$ соответствует дифференцированию изображения, то $t^2 e^{-3t} \doteq \left(\frac{1}{p+3} \right)'' = ((p+3)^{-1})'' = \frac{2}{(p+3)^3}$.

§19.

$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}}$. Так как $\frac{1}{p^{k+1}} = \frac{t^k}{k!}$, то $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$.

§20.

$$x'' + x = 2e^t, \quad x(0) = 0; \quad x'(0) = 1.$$

Пусть $x(t) = F(p)$. Тогда $x''(t) = p(pF(p) - x(0)) - x'(0) = p^2 F(p) - 1$;

$$e^t = \frac{1}{p-1} \Rightarrow p^2 F(p) - 1 + F(p) = 2 \frac{1}{p-1} \Rightarrow (p^2 + 1)F(p) = \frac{2}{p-1} + 1 \Rightarrow$$
$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Так как $F(p) = e^t - \cos t$, то ответ $x(t) = e^t - \cos t$.

Справочные материалы

А. Таблица производных

1. $c' = 0, c = \text{const}$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15. $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

16. $(\text{sh} x)' = \text{ch} x$

17. $(\text{ch} x)' = \text{sh} x$

18. $(\text{th} x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

19. $(\text{cth} x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$

Б. Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
 $n \neq -1, x > 0$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$

13. «Высокий» логарифм:
 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$

14. «Длинный» логарифм:
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

В. Таблица изображений и оригиналов

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$t e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p - \lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\text{arctg } p$
$t^n e^{\lambda t}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}(1 - e^{-t})$	$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\delta(t - a), a > 0$	e^{-ap}
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		